

I. 以下の問いに答えよ。

- (i) 自然数  $n$  に対して、数列  $(2n-1)^2, 2(2n-2)^2, 3(2n-3)^2, \dots, n(2n-n)^2$  の和を求めると、

$$\frac{n^2 \left( n + \boxed{(1)} \right) \left( \boxed{(2)} \div \boxed{(3)} n - \boxed{(4)} \right)}{\boxed{(5)} \div \boxed{(6)}}$$

である。

- (ii) 関数  $y = (\log_2 x)^2 + \log_4 \frac{x^8}{4}$  は  $x = \frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}$  において最小値  $-\boxed{(9)}$  をとる。

- (iii) 2つの放物線  $y = x^2$  と  $y = -(x-K)^2 + L$  がある点で共通の接線をもつための必要十分条件を  $K$  と  $L$  を用いて表せ。

$\boxed{\text{(ア)}}$

II. 一辺の長さが1である正六角形ABCDEFにおいて、辺BCを1:3に内分する点をMとし、線分ADを $t:(1-t)$  (ただし、 $0 < t < 1$ )に内分する点をPとする。

(i) ベクトル $\overrightarrow{AM}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AF}$ を使って表すと、

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}} \overrightarrow{AF}$$

である。

(ii) ベクトル $\overrightarrow{PM}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$ , ベクトル $\overrightarrow{AF}$ , 実数 $t$ を使って表すと、

$$\overrightarrow{PM} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (\text{イ})$$

である。

(iii) ベクトル $\overrightarrow{AC}$ とベクトル $\overrightarrow{PM}$ の内積を求めると、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{\boxed{(14)} \boxed{(15)}}{\boxed{(16)}} - \boxed{(17)} t$$

である。従って、 $t = \frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}}$  であるとき、線分ACと線分PMは垂直である。

III. ある商店では2種の商品A, Bを通信販売していて、注文する客は必ずいずれかの商品1個のみを注文するものとする。Bの価格は100円である。Aの価格が $x$ 円（ただし、 $40 \leq x \leq 140$ ）であるときに客がAを注文する確率は $-\frac{1}{100}x + \frac{7}{5}$ である。また、客は注文する時点では在庫の有無を知らず、注文した商品が品切れであるときは商品の売買は行われないものとする。

- (i) 商品A, B共に1個以上の在庫があるとする。1人の客が注文したときの売上金額の期待値をAの価格 $x$ を用いて表すと、

$$-\frac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)} \boxed{(22)} \boxed{(23)}} x^2 + \frac{\boxed{(24)} \boxed{(25)}}{\boxed{(26)}} x - \boxed{(27)} \boxed{(28)} \text{ (円)}$$

である。これが最大となるAの価格は $x_0 = \boxed{(29)} \boxed{(30)} \boxed{(31)}$  (円) であり、このとき客がAを注文する確率は $\frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}}$ 、売上金額の期待値は $\boxed{(34)} \boxed{(35)} \boxed{(36)}$  円である。

- (ii) 商品A, Bの在庫はそれぞれ2個, 3個であるとし、3人の客が順に注文するものとする。

- (1) 商品Aの価格を(i)で求めた $x_0$ 円としたとする。このとき、3人の客に対する売上金額の合計が300円以上である確率は

$$\frac{\boxed{(37)} \boxed{(38)} \boxed{(39)}}{\boxed{(40)} \boxed{(41)} \boxed{(42)}} \text{ である。また、3人の客に対する売上金額の合計の期待値は}$$

$$\frac{\boxed{(43)} \boxed{(44)} \boxed{(45)} \boxed{(46)}}{\boxed{(47)} \boxed{(48)}} \text{ 円}$$

である。

- (2) 商品A, Bが共に1個以上売れる確率が $\frac{12}{25}$ 以上となるAの価格 $x$ の範囲を求めよ。

(ウ)

- IV. ある特別なオリーブオイルを独占的に販売している企業Aについて考えよう。企業Aは、このオリーブオイルの1年間の販売量が $u$ 本であるとき、販売期間中の1本あたりの価格 $p$ 円を

$$p = 9000 - 30u \quad (1)$$

と定める。ただし、 $u$ は条件 $0 \leq u \leq 300$ を満たすものとする。企業Aがオリーブオイルをこの価格で販売したとき、オリーブオイルは売れ残らないものとする。企業Aはオリーブオイルの年間販売金額が最大になるように販売量 $u$ を定める。

- (i) オリーブオイルの年間販売金額を最大にする販売量 $u$ は

(49) (50) (51) (本) である。

次に、ある希少なキノコの栽培に世界で初めて成功した企業Bについても考えよう。このキノコは1年のうち限られた期間のみ収穫される。収穫は時点0で開始し、時点6で終了する。また、収穫期におけるキノコの収穫量は時期により変化する。そこで、時点 $t$ （ただし、 $0 \leq t \leq 6$ ）におけるキノコの単位時間あたりの収穫量を $v(t)$  kgで表すことにする。企業Bは時点 $t$ において、収穫したキノコを1 kgあたり $q(t) = 24000 - 300v(t)$  (円) で販売する。そのとき、そのキノコはすぐに売り切れるものとする。ここで、キノコの収穫量 $v(t)$ はキノコの栽培規模を表す実数 $M$ を用いて、 $v(t) = M \left( 1 - \left| 1 - \frac{1}{3}t \right| \right)$  で表されるとする。ただし、栽培上の技術的な理由で、 $M$ は条件 $0 \leq M \leq 80$ を満たす必要がある。キノコの年間販売金額は、収穫量 $v(t)$ と価格 $q(t)$ との積を0から6まで積分して得られるものとし、企業Bはキノコの年間販売金額が最大になるように栽培規模 $M$ を定める。

- (ii) このとき、企業Bが定めるキノコの栽培規模 $M$ は (52) (53) である。

さて、今までは知られていなかったが、ある料理家が、企業Aが販売するオリーブオイルと企業Bが栽培するキノコが実に相性が良いことを発見し、両者を使ってなんともおいしい料理を創作したとしよう。この料理が人気になったため、企業Aが販売するオリーブオイルが簡単に手に入るほど企業Bが栽培するキノコの価値も高まり、キノコはより高い価格で売れることがわかった。そこで企業Bは、オリーブオイルの1年間の販売量が $u$ 本で、時点 $t$ におけるキノコの単位時間あたりの収穫量が $v(t)$  kgであるとき、キノコ1 kgあたりの価格 $q(t)$ 円を

$$q(t) = (24000 - 300v(t)) \left( 1 + \frac{u}{300} \right) \quad (2)$$

で定めることにした。ここでも、企業Bが収穫したキノコをこの価格で販売したとき、そのキノコはすぐに売り切れるものとする。一方企業Aは、今までと同様にオリーブオイル1本あたりの価格 $p$ 円を式(1)で定める。

- (iii) 新しい料理が知られた後でも、企業Aのオリーブオイルの販売量 $u$ は  
 (i)で求めたままであるとすると、企業Bは、キノコの年間販売金額を最大にするために、栽培規模 $M$ を  $\boxed{(54)} \quad \boxed{(55)}$  と定める。

最後に、企業Aが企業Bを吸収合併したとしよう。合併後の企業Aは、今までと同様にオリーブオイル1本あたりの価格 $p$ 円を式(1)で、キノコ1kgあたりの価格 $q(t)$ 円を式(2)で定める。そして企業Aは、オリーブオイルとキノコの年間販売金額の和を最大にするように、オリーブオイルの販売量 $u$ とキノコの栽培規模 $M$ を定める。ただし、ある事情により、上述の条件 $0 \leq u \leq 300$ と $0 \leq M \leq 80$ のほかに、 $u + 5M = 450$ という条件も満たすことが必要になったとする。

- (iv) このとき、企業Aが定めるオリーブオイルの販売量 $u$ は

$\boxed{(56)} \quad \boxed{(57)} \quad \boxed{(58)}$  (本)で、キノコの栽培規模 $M$ は  $\boxed{(59)} \quad \boxed{(60)}$  である。

- (v) 企業Aが企業Bを吸収合併することにより、オリーブオイルの年間販売金額、キノコの年間販売金額、および、それらの和が、それぞれどう変化するかを調べよう。そのために、(iii)から定まる年間販売金額と(iv)から定まる年間販売金額を比較する。以下の各空欄には、「増加する」が適する場合は1を、「変わらない」が適する場合は2を、「減少する」が適する場合は3を入れよ。オリーブオイルの年間販売金額は  $\boxed{(61)}$ 。キノコの年間販売金額は  $\boxed{(62)}$ 。両者の和は  $\boxed{(63)}$ 。