

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) xy 平面上の曲線

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$$

上の点は原点を中心とする 30° の回転移動によって、^だ楕円

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{(あ)}}} + \frac{y^2}{\boxed{\text{(い)}}} = 1$$

上の点に移る。

(2) 四角形 ABCD において、 $AB=1$, $BC=2$, $CD=3$, $DA=4$ であり、すべての内角が 180° 未満であるとき、対角線 AC の長さを x , $t=x^2$ とおくと、この四角形の面積 S は t の式として $S = \boxed{\text{(う)}}$ と表される。ゆえに S は $t=x^2 = \boxed{\text{(え)}}$ のとき最大となる。

(3) xy 平面上の曲線 $C: 2y = |x^2 - 5x + 4|$ と直線 $l: y = kx$ ($k > 0$) が 3 個の共有点をもっているとする。このとき $k = \boxed{\text{(お)}}$ である。また、曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{(か)}}$ である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

n を自然数とする。1, 2, 3, 4 と番号のつけられた 4 つの箱が用意されている。番号 1 の箱の中には球が 1 個入っていて、他の箱の中には何も入っていないとする。ここで次の操作 T を n 回繰返し行う。

操作 T

球をいま入っている箱以外の 3 つの箱のどれかに確率 $\frac{1}{3}$ ずつで移す。

操作 T を 1 回行った時点で球が入っている箱の番号を a_1 で表す。同様に、操作 T を i 回 ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 繰返し行った時点で球が入っている箱の番号を a_i で表す。箱の番号の集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ を全体集合とし、 U の部分集合

$$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

を考える。

- (1) $a_1 = 1$ となる確率は 0, $a_2 = 1$ となる確率は (あ) であり、一般に $a_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) となる確率は (い) である。
- (2) $n \geq 2$ のとき $A_n = \{1, 2\}$ となる確率は (う) であり、 $A_n = \{3, 4\}$ となる確率は (え) である。
- (3) $n \geq 1$ のとき $A_n \subset \{1, 2, 3\}$ となる確率は (お) であり、 $A_n \subset \{2, 3, 4\}$ となる確率は (か) である。
- (4) $n \geq 3$ のとき $A_n = \{1, 2, 3\}$ となる確率は (き) であり、 $A_n = \{2, 3, 4\}$ となる確率は (く) である。
- (5) $n \geq 3$ のとき $\{1, 2, 3\} \subset A_n$ となる確率は (け) である。
- (6) $n \geq 3$ のとき $A_n \cup \{1, 2\} = U$ となる確率は (こ) である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

a を実数とし

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - a \cos x \right| dx$$

とする。 $\sin x = y$ とおくと,

$$f(a) = \int_0^c |g(y) - a| dy$$

となる。

(1) $c =$, $g(y) =$ である。

(2) $a \leq 0$ のとき $f(a) =$, $a \geq 1$ のとき $f(a) =$, $0 < a < 1$ のとき $f(a) =$ である。

(3) $f(a)$ は $a =$ のとき最小となり, 最小値は である。

[IV]

設問 (1) から (3) では、文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また、設問 (4) に答えなさい。

n を自然数, a, b を正の定数, t を実数とする。座標空間における xy 平面内に $n+1$ 個の点 $P_k(t + \frac{k}{n}a, b, 0)$, $k=0, 1, \dots, n$, zx 平面内に $n+1$ 個の点 $Q_k(t + \frac{k}{n}a, 0, t + \frac{k}{n}a)$, $k=0, 1, \dots, n$, をとる。

(1) 各 k ($k=0, 1, \dots, n-1$) に対し, $\triangle P_k Q_k P_{k+1}$ の面積 A_k は $A_k =$ (あ) であり, $\triangle Q_k P_{k+1} Q_{k+1}$ の面積 B_k は $B_k =$ (い) である。

(2) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (A_k + B_k)$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とおくと, $S = \int_t^{t+a}$ (う) dx と表すことができる。

(3) S_1, S を t の関数と考えたとき, S_1 は $t =$ (え) で最小となり, S は $t =$ (お) で最小となる。

(4) S_n を t の関数と考えたとき, S_n は (お) $< c <$ (お) $+\frac{a}{2n}$ をみたす c で最小となることを示しなさい。