[1] 座標平面上の直線 $y=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$ を ℓ とし，原点 O，点 P(6,0)，および ℓ 上の点 Q の 3 点を通る円を C とする．ただし，点 Q の y 座標は正とする．

(1) 円 C の中心が x 軸上にあるとき，C の中心の x 座標は $\boxed{(1)}$ であり，このとき $\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{\boxed{(2)}\pi}{\boxed{(3)}}$ となる．

(2) 円 C の半径が $2\sqrt{3}$ であるとき，C の中心の y 座標は $\sqrt{\boxed{(4)}}$ となる．このとき，点 Q の y 座標は $\boxed{(5)}\sqrt{\boxed{(6)}}$ である．

以下，$\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{5\pi}{12}$ とする．

(3) 点 Q の y 座標は $\boxed{(7)}-\boxed{(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}$ となる．

(4) 関係 $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}$ と加法定理から，$\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{\boxed{(10)}}+\sqrt{2}}{\boxed{(11)}}$ と求まる．円 C の半径は $\boxed{(12)}\left(\sqrt{\boxed{(13)}}-\sqrt{\boxed{(14)}}\right)$ である．

[2] 赤，黄，白，黒の 4 種類の色の球が袋に合計 24 個入っているとする．この袋から球を 1 つ取り出して，色を調べてから袋に戻すことを試行という．以下 (a), (b), (c) が成り立つとする．

(a) 試行を 1 回行うとき，赤または黄の球が取り出される確率は $\dfrac{1}{4}$ である．

(b) 試行を 2 回続けて行うとき，赤と黄の球がそれぞれ 1 回ずつ取り出される確率は $\dfrac{1}{36}$ である．

(c) 試行を 3 回続けて行うとき，白の球が 1 回，黒の球が 2 回取り出される確率は $\dfrac{49}{288}$ である．

(1) 試行を 2 回続けて行うとき，赤または黄の球が 1 回，かつ，白または黒の球が 1 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$ である．

(2) 試行を 3 回続けて行うとき，3 回とも赤の球，または，3 回とも黄の球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$ である．

(3) 袋に入っている黒の球は $\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ 個，白の球は $\boxed{(23)}$ 個である．

(4) 試行を 4 回続けて行うとき，白の球がちょうど 2 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}\boxed{(27)}\boxed{(28)}}$ である．

[3] r を 1 でない正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を，初項 $a_1 = r$ および漸化式

$$\begin{cases} a_{2m} = a_{2m-1} + 2m + 1 \\ a_{2m+1} = ra_{2m} \end{cases} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める．

(1) $a_2 = r + \boxed{(29)}$，$a_3 = r^2 + \boxed{(30)}\,r$，$a_4 = r^2 + \boxed{(31)}\,r + \boxed{(32)}$ である．

(2) $m \geqq 1$ に対し，$b_m = a_{2m-1}$ とおく．数列 $\{b_m\}$ は，初項 $b_1 = \boxed{(33)}\,r$ および漸化式

$$b_{m+1} = r\left(b_m + \boxed{(34)}\,m + \boxed{(35)}\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす．さらに，$m \geqq 1$ に対して $c_m = \dfrac{b_m}{r^m}$ とおくと，数列 $\{c_m\}$ の初項は $c_1 = \boxed{(36)}$，隣り合う 2 項の差は $d_k = c_{k+1} - c_k = \dfrac{\boxed{(37)}\,k + \boxed{(38)}}{r^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ なので，$m \geqq 2$ ならば

$$c_m = c_1 + \sum_{k=1}^{m+\boxed{(39)}\boxed{(40)}} d_k = \sum_{l=1}^{m} \frac{\boxed{(41)}\,l + \boxed{(42)}\boxed{(43)}}{r^{l-1}}$$

となる．ここで

$$1 + \left(1 - \frac{1}{r}\right)c_m = \sum_{l=1}^{m} \frac{\boxed{(44)}}{r^{l-1}} - \frac{\boxed{(45)}\,m - \boxed{(46)}}{r^m}$$

であるから

$$c_m = \frac{\boxed{(47)}(r^m - 1)}{r^{m-2}(r-1)^2} - \frac{\boxed{(48)}\,m - \boxed{(49)}}{r^{m-1}(r-1)} - \frac{r}{r-1}$$

となる．この式は $m = 1$ のときも成り立つ．

(3) $m \geqq 1$ に対して，$a_{2m-1} = r^m c_m$ より

$$a_{2m-1} = \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - \left(\boxed{(50)}\,m + \boxed{(51)}\right)r^2 + \left(\boxed{(52)}\,m - \boxed{(53)}\right)r\right\}$$

$$a_{2m} = \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - \left(\boxed{(54)}\,m + \boxed{(55)}\right)r + \left(\boxed{(56)}\,m + \boxed{(57)}\right)\right\}$$

となる．

[4] 実数 x, y, z は連立方程式

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+3} + 5^{z+2} = 1 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} - 5^{z+1} = 1 \end{cases}$$

を満たすとする．

(1) $X = 2^x$ とおく．$3^y, 5^z$ を，それぞれ X を用いて表せ．さらに x の取りうる値の範囲を，$\log_2 5$ と $\log_2 7$ を用いて表せ．

(2) 整式 $Y^3 + Z^3$ を，$P = Y + Z, Q = YZ$ とおき，P と Q を用いて表せ．

(3) $27^y + 125^z$ が最小となるような x の値を，$\log_2 3, \log_2 5, \log_2 7$ を用いて表せ．

[5] 四面体 OABC において，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 5, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 3, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{21}$$

であるとする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．以下，$\vec{p} \cdot \vec{q}$ はベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を表す．

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ．

以下，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ であるとする．線分 BC を $2:1$ に内分する点を M とし，直線 OA を ℓ_1，直線 BC を ℓ_2 とするとき，ℓ_1 上の点 N に対して，$\mathrm{MN} \perp \ell_1$ かつ $\mathrm{MN} \perp \ell_2$ が成り立つとする．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\vec{a}$ を満たす実数 s を求めよ．さらに，$\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ．

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|^2$ の値を求めよ．

(4) 直線 ℓ_1 上の 2 点と直線 ℓ_2 上の 2 点を頂点とする正四面体の一辺の長さ d を求めよ．

[6] $F(x)$ は x の 3 次式で，x^3 の係数は 1 であるとし，$y=F(x)$ で定まる曲線を C とする．$\alpha_1<\alpha_2$ を満たす実数 α_1, α_2 に対して，曲線 C は，x 軸と 2 点 $(\alpha_1,0)$, $(\alpha_2,0)$ を共有し，さらに x 軸は点 $(\alpha_2,0)$ における C の接線であるとする．

(1) 関数 $F(x)$ は $x=\alpha$ において極大になり，$x=\beta$ において極小になるとする．このとき α, β を，それぞれ α_1, α_2 のみを含む式で表せ．必要ならば x の整式で表される関数 $p(x)$, $q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}'=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$$

を用いてもよい．

(2) $f(x)=F'(x)$ とする．点 $\mathrm{A}\bigl(\alpha,F(\alpha)\bigr)$ における曲線 C の接線を ℓ とし，ℓ と C の共有点で A と異なる点を $\bigl(\gamma,F(\gamma)\bigr)$ とする．このとき $f(\gamma)$ を，α,γ のみを含む式で表せ．さらに γ を，α_1, α_2 のみを含む式で表せ．

(3) x 軸，曲線 $y=f(x)$，および直線 $x=\gamma$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を，α_1, α_2 のみを含む式で表せ．また $\alpha_1^2+1\leqq\alpha_2$ が成り立つとき，S の最小値 T を求めよ．