I.　以下の問いに答えよ。

(i)　k を0以上の整数とする。座標空間において，$(x_k, 0, 0)$ を中心とする半径 r_k の球 S_k を考える。ただし，$x_0 = 0$ であり，$r_0 = \sqrt{5}$ とする。また，$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，S_k の中心が S_{k-1} 上にあるとし，$x_k > x_{k-1}$ を満たすとする。

- $r_1 = \sqrt{5}$ のとき，S_0 と S_1 が交わってできる円の円周の長さは $\sqrt{\boxed{(1)\ (2)}}\,\pi$ となる。

- S_0 と S_1 が交わってできる円の円周の長さが最大になるのは，$r_1 = \sqrt{\boxed{(3)\ (4)}}$ のときである。ここで，xy 平面上の直線 l が S_0 と S_1 のいずれとも1点のみを共有するとき，l が x 軸と交わる点の座標は，$\left(-\sqrt{\boxed{(5)}} - \sqrt{\boxed{(6)\ (7)}},\ 0,\ 0\right)$ である。

- $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，S_{k-1} と S_k が交わってできる円の円周の長さが最大となるように r_k を定める。r_k が r_0 の100倍以上になるのは $k \geqq \boxed{(8)\ (9)}$ のときである。

(ii)　Oを原点とする座標平面上に2点 $\mathrm{A}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ と $\mathrm{B}(3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ がある。

- $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \boxed{(10)}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = \boxed{(11)\ (12)}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{(13)\ (14)}$ である。

- $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が成り立つ点Cの座標は

$$\left(\boxed{(15)\ (16)} + \sqrt{\boxed{(17)}},\ \boxed{(18)\ (19)} - \sqrt{\boxed{(20)}}\right)$$

　である。

- $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たす点をDとすると，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = \boxed{(21)}\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であり，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \dfrac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる。

- 直線OBと直線CDの交点をEとすると，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|} = \dfrac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ である。また，$\triangle\mathrm{OAC}$ の面積は $\boxed{\quad(\mathrm{A})\quad}$ であり，$\triangle\mathrm{BCD}$ の面積は $\boxed{\quad(\mathrm{B})\quad}$ である。

II. n を自然数，a_n，b_n を実数として，関数 $f_n(x)$ と $g(x)$ を

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n, \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + 3$$

で定義する。また，$f_{n+1}(x)$ は関数 $g(x) \cdot f_n(x)$ の導関数であるとする。このとき，a_n と b_n は漸化式

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}} a_n + \boxed{(32)}, \qquad b_{n+1} = \frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}} b_n + \boxed{(35)} a_n$$

を満たす。全ての自然数 n について $a_n > a_{n+1}$ が成り立つのは，

$$a_1 > \boxed{(36) \ (37)} \qquad \cdots ①$$

のときである。

b_1 が4の倍数で，放物線 $y = f_1(x)$ と直線 $y = g(x)$ が接しているとき，①を満たすような最小の a_1 は

$$a_1 = \frac{\boxed{(38) \ (39)}}{\boxed{(40)}} \qquad \cdots ②$$

で，このとき，b_1 は

$$b_1 = \boxed{(41) \ (42)} \qquad \cdots ③$$

である。初項がこのように定まったとき，a_n の一般項は

$$a_n = \boxed{\qquad (C) \qquad}$$

となる。ここで，実数 r に対し，$[r]$ を r を超えない最大の整数とすると，$a_n - [a_n] < 0.001$ となるような最小の n は

$$n = \boxed{(43) \ (44)}$$

である。ただし，必要であれば $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$，$\log_{10} 5 = 0.699$, $\log_{10} 7 = 0.845$ を近似として用いてもよい。

a_1 と b_1 がそれぞれ②，③で与えられたとき，b_n の一般項は

$$b_n = \boxed{\qquad (D) \qquad}$$

となる。

III. ある銀行には窓口がひとつだけあり，その窓口には10時からちょうど10分おきに1人ずつ客が到着する。どの客も確率 $\frac{1}{2}$ でAの手続きを，確率 $\frac{1}{2}$ でBの手続きを行う。Aの手続きに必要な時間はちょうど5分，Bの手続きに必要な時間はちょうど15分である。

それぞれの客の手続きは，それ以前に到着した全ての客の手続きが完了すると同時に開始される。ただし，到着時に前の全ての客の手続きが完了している場合には，到着と同時に手続きが始まるものとする。

以降，窓口に到着した n 人目の客を客 n と呼び，ある客が窓口に到着してから手続きが始まるまでの時間をその客の待ち時間と呼ぶ。例えば，客1から客10が順にABBBAAAABAの手続きを行ったとき，それぞれの客の到着時刻，手続きの開始・終了時刻，待ち時間は下表の通りとなる。

客	到着	開始	終了	待ち時間	客	到着	開始	終了	待ち時間
1	10:00	10:00	10:05	0分	6	10:50	11:00	11:05	10分
2	10:10	10:10	10:25	0分	7	11:00	11:05	11:10	5分
3	10:20	10:25	10:40	5分	8	11:10	11:10	11:15	0分
4	10:30	10:40	10:55	10分	9	11:20	11:20	11:35	0分
5	10:40	10:55	11:00	15分	10	11:30	11:35	11:40	5分

ここで，客 n の待ち時間が x 分となる確率を $W(n, x)$ とおく。

以下の設問において $\boxed{\text{(99)}}$ や $\boxed{\text{(ン)}}$ が2度以上現れる場合には，2度目以降はそれぞれ $\boxed{\text{(99)}}$，$\boxed{\text{(ン)}}$ のように破線で表記することにする。

(i) 客1の手続きは必ず10時に始まるため，$W(1,0) = 1$ である。また，客1の行う手続きによって客2の待ち時間が変わるので，$W(2,0) = W(2,5) = \frac{1}{2}$ となる。同様に考えて，$W(3, \boxed{\text{(45)}}) = \frac{1}{2}$，$W(3, \boxed{\text{(46)}}) = W(3, \boxed{\text{(47)}\ \text{(48)}}) = \frac{1}{4}$，$W(4, \boxed{\text{(49)}}) = W(4, \boxed{\text{(50)}}) = \dfrac{\boxed{\text{(51)}}}{\boxed{\text{(52)}}}$，$W(4, \boxed{\text{(53)}\ \text{(54)}}) = W(4, \boxed{\text{(55)}\ \text{(56)}}) = \dfrac{\boxed{\text{(57)}}}{\boxed{\text{(58)}}}$ となる。

以下，nを2以上の自然数，tを整数としたとき，$0 \leqq t \leqq n-1$ならば，

$$W(n,5t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+t-1}{2}} & n+t\text{が奇数のとき} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+t}{2}} & n+t\text{が偶数のとき} \end{cases} \qquad \cdots ④$$

が成り立つことをnに関する数学的帰納法で証明する。

(ii) 空欄 $\boxed{(59)}$ ～ $\boxed{(77)}$ に当てはまる最も適切な式を下の選択肢から選び，その番号を解答用紙A（マークシート）の所定の欄にマークしなさい。

1. $k+1$	2. k	3. $k-1$	4. $k-2$
5. $t+1$	6. t	7. $t-1$	8. $t-2$

$n=2$のとき，$W(2,0) = W(2,5) = \dfrac{1}{2}$であったので，④は$t=0,1$に対して成り立つ。以降，$k \geqq 2$とし，$n=k$のときに$0 \leqq t \leqq n-1$ならば④が成り立つと仮定し，$n=k+1$のときを考える。

$W(k+1,5k)$は客kが$5(k-1)$分待った後にBの手続きを行う確率と等しいので，

$$W(k+1,5k) = W(k,5(k-1)) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}} \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(60)}-1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}} \cdot {}_{k}\mathrm{C}_{\boxed{(62)}}$$

となり，④は$t=k$のとき成り立つ。同様に

$$W(k+1,5(k-1)) = W(k,5(\boxed{(63)})) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}} \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(64)}}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}} \cdot {}_{k}\mathrm{C}_{\boxed{(65)}}$$

となり，④は$t=k-1$のとき成り立つ。

$1 \leqq t \leqq k-2$のとき，$W(k+1,5t)$は客kが$5(\boxed{(66)})$分待った後にAの手続きを行う確率と，客kが$5(\boxed{(67)})$分待った後にBの手続きを行う確率の和なので，

$$W(k+1,5t) = W(k,5(\boxed{(66)})) \times \frac{1}{2} + W(k,5(\boxed{(67)})) \times \frac{1}{2} \qquad \cdots ⑤$$

となる。$k+1+t$が奇数のとき，

$$W(k,5(\boxed{(66)})) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}} \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(68)}-1}{2}}, \quad W(k,5(\boxed{(67)})) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}} \cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(69)}-1}{2}}$$

なので，⑤より

$$W(k+1,5t) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}} \left({}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(70)}}{2}} + {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(70)}}{2}-1} \right) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}} \cdot {}_{\boxed{(71)}}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(72)}}{2}}$$

となり，$k+1+t$が偶数のとき，

$$W(k,5(\boxed{(66)})) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(73)}}{2}},\quad W(k,5(\boxed{(67)})) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(74)}}{2}}$$

なので，⑤より

$$W(k+1,5t) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\left({}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(75)}}{2}} + {}_{k-1}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(75)}}{2}-1}\right) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\cdot {}_{\boxed{(76)}}\mathrm{C}_{\frac{k+\boxed{(77)}}{2}}$$

となる。したがって，④は$1 \leqq t \leqq k-2$のとき成り立つ。

(iii) (ii)の文章にならい，空欄（ア）～（シ）に入る最も適切な式を解答用紙Bの所定の欄に記述しなさい。

$W(k+1,0)$は客kが5分待った後にAの手続きを行う確率と客kが待ち時間なくAの手続きを行う確率の和なので，

$$W(k+1,0) = W(k,5)\times\frac{1}{2} + W(k,0)\times\frac{1}{2} \qquad \cdots ⑥$$

となる。$k+1$が奇数のとき，④より

$$W(k,5) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(イ)}},\qquad W(k,0) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(ウ)}}$$

であるが，一般に$p \geqq q \geqq 0$を満たす整数p，qに対して${}_p\mathrm{C}_q = {}_p\mathrm{C}_{\boxed{(エ)}}$が成り立つことに注意すると，⑥より

$$W(k+1,0) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\left({}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(オ)}} + {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(オ)}-1}\right) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\cdot {}_{\boxed{(カ)}}\mathrm{C}_{\boxed{(キ)}}$$

となる。また，$k+1$が偶数のとき，

$$W(k,5) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(ク)}},\qquad W(k,0) = \frac{1}{2^{\boxed{(59)}}}\cdot {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(ケ)}}$$

なので，⑥より

$$W(k+1,0) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\left({}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(コ)}} + {}_{\boxed{(ア)}}\mathrm{C}_{\boxed{(コ)}-1}\right) = \frac{1}{2^{\boxed{(61)}}}\cdot {}_{\boxed{(カ)}}\mathrm{C}_{\boxed{(サ)}}$$

となる。したがって，④は$\boxed{(シ)}$のとき成り立つ。

以上より，任意の2以上の自然数nに対して$0 \leqq t \leqq n-1$ならば④が成り立つことが示された。