注　意　問題1，2，3，4，5の解答を，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ム）については，分数は既約分数にするなど最も ふさわしいもの（数，式など）を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　複素数 x が $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を満たすとする。$y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと y の満たす2次方程式は $\boxed{\quad（ア）\quad}=0$ である。したがって元の方程式の解を複素数の範囲ですべて求めると $\boxed{\quad（イ）\quad}$ となる。

（2）　実数 x，y が $x^3+y^3+xy-3=0$ を満たすとする。$s=x+y$，$t=xy$ とおくと，t は s を用いて $t=\boxed{\quad（ウ）\quad}$ と表せる。さらにこのとき s のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad（エ）\quad}$ である。

（3）　3で割った余りが1となる自然数 n に対し，$(x-1)(x^{3n}-1)$ が $(x^3-1)(x^n-1)$ で割り切れることを証明しなさい。

2

座標平面上で点Pは原点Oを出発点とし，さいころを投げて1または2の目が出たときはx軸方向の正の向きに1進み，3または4の目が出たときはy軸方向の正の向きに1進み，5または6の目が出たときはy軸方向の負の向きに1進むものとする。たとえば，さいころを3回投げて，1回目に2，2回目に5，3回目に4の目が出たとすると，点Pの座標は順に$(1,\ 0)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 0)$となる。

(1) さいころを2回投げたとき，点Pのy座標が0である確率は $\boxed{\text{（オ）}}$ である。

(2) さいころを3回投げたとき，点Pのx座標またはy座標が1以上である確率は $\boxed{\text{（カ）}}$ である。

(3) さいころを4回投げたとき，点Pのx座標が2以上である確率は $\boxed{\text{（キ）}}$ であり，点Pのx座標が2以上であるという条件の下で点Pのy座標が0である条件付き確率は $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

(4) さいころをn回$(n \geqq 2)$投げたときはじめて点Pのx座標が2となる確率は $\boxed{\text{（ケ）}}$ である。

(5) さいころをn回$(n \geqq 3)$投げたとき，1回目からn回目までに点Pが直線$x=2$上の格子点を2つ以上通る確率は $\boxed{\text{（コ）}}$ である。ただし，座標平面上でx座標，y座標がともに整数である点$(x,\ y)$のことを格子点といい，さいころをn回投げたとき，点Pが直線$x=2$上の格子点にいる場合は，n回目までにこの格子点を通ったものとする。

3

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し $a_n=\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$ とおく。

（1） a_1 を計算すると $a_1=$ $\boxed{\text{（サ）}}$ である。また，部分積分を用いると 2 以上の自然数 n に対し $a_n=$ $\boxed{\text{（シ）}}$ a_{n-2} となることがわかる。

（2） $a_n a_{n-1}$ を n を用いて表すと $a_n a_{n-1}=$ $\boxed{\text{（ス）}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ である。

（3） 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$ が 1 に収束することを証明しなさい。

（4） 以上の結果を用いると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=$ $\boxed{\text{（セ）}}$ であることがわかる。

4

空間内に $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$ となる 2 点 O，A があり，空間内の図形 S は，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 P 全体からなるとする。点 B は図形 S 上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=6$ であるとし，直線 AB と図形 S との交点のうち，点 B とは異なる点を C とする。点 D は図形 S 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ であるとする。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\boxed{（ソ）}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{（タ）}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{（チ）}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{（ツ）}$ である。

(2)　3 点 A，B，D を含む平面で図形 S を切った切り口の曲線を T とし，曲線 T 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$（$s$，$t$，$u$ は実数）を満たすとする。このとき s と t は関係式

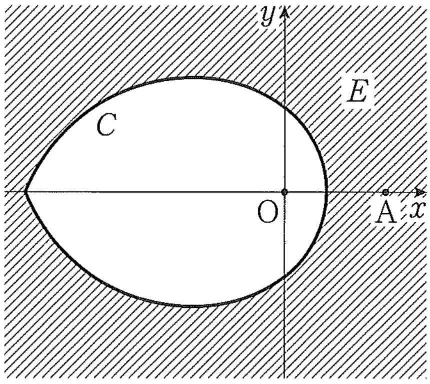
$$s^2+\boxed{（テ）}t^2+\boxed{（ト）}st+\boxed{（ナ）}s+\boxed{（ニ）}t=\boxed{（ヌ）}$$

を満たす。

(3)　曲線 T 上の点で，点 O からの距離が最大となる点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\boxed{（ネ）}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{（ノ）}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{（ハ）}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表すことができる。また，四面体 OCDE の体積は $\boxed{（ヒ）}$ である。

5

座標平面上に図の太線のような曲線 C があり，その外部（図の斜線部分，境界線 C を含む）を領域 E とする。曲線 C 上の点Pは次の条件を満たすとする。ただし v は1より大きい実数である。



> 線分OPの長さと，点A(1, 0)から点Pへの領域 E 内の最短経路の長さの比が $1:v$ である。

（1） $\mathrm{OQ}:\mathrm{AQ}=1:v$ を満たす点Qの軌跡 S は円であり，その半径は $\boxed{\text{（フ）}}$ である。点Aを通る直線が，y 座標が正の点Bで円 S に接するとき，点Bの座標は $\left(\boxed{\text{（ヘ）}},\ \boxed{\text{（ホ）}}\right)$ である。

曲線 C の $x \geqq \boxed{\text{（ヘ）}}$ の部分は円 S の一部となる。曲線 C の $x \leqq \boxed{\text{（ヘ）}}$，$y \geqq 0$ の部分を曲線 C_1 とする。曲線 C_1 上の点Rに対し，点Aから点Rへの領域 E 内の最短経路は，線分ABと，点Bから点Rまでの曲線 C_1 の部分をつなげたものである。

（2） 極座標 $(r,\ \theta)$ に関する曲線 C_1 の極方程式を $r=f(\theta)$ とし，点Bの偏角を θ_0，点Rの偏角を θ_1 とする。このとき，点Aから点Rまでの領域 E 内の最短経路の長さは $f(\theta)$ とその導関数 $f'(\theta)$ を用いると

$$\mathrm{AB}+\int_{\theta_0}^{\theta_1}\boxed{\text{（マ）}}\,d\theta$$

となる。これが $vf(\theta_1)$ に等しくなるので，$f(\theta)=\beta e^{\alpha(\theta-\theta_0)}$ の形をしているとして α，β を求めると $\alpha=\boxed{\text{（ミ）}}$ となる。特に $v=\sqrt{2}$ のとき，曲線 C で囲まれた領域の面積は $\boxed{\text{（ム）}}$ となる。