[1] 座標平面上の直線 $y = x + 1$ を ℓ とする．また，実数 a に対して，円

$$x^2 + y^2 - 8x - 2ay + a^2 = 0$$

を C とし，その中心を点Pとする．

(1) ℓ がPを通るとき，$a = \boxed{(1)}$ である．

(2) ℓ と C が異なる2点で交わるための必要十分条件は

$$\boxed{(2)} - \boxed{(3)}\sqrt{2} < a < \boxed{(4)} + \boxed{(5)}\sqrt{2}$$

である．

実数 a が (2) の範囲にあるとき，ℓ と C の2つの共有点を Q, R とする．

(3) 三角形PQRの面積が8となるような a の値を小さい方から順に並べると，$\boxed{(6)}$, $\boxed{(7)}$ である．

(4) $\angle$QPR が 150° であるとき，a は

$$(a-5)^2 = \boxed{(8)}\boxed{(9)} - \boxed{(10)}\sqrt{\boxed{(11)}}$$

を満たす．

[2] 16 枚のカードに x の関数が 1 つずつ印刷されている．その内訳は，7 枚に $-6x+15$, 5 枚に $-3x^2+12$, 3 枚に $6x^2-10x+11$, 1 枚に $6x$ である．

(1) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．印刷されている関数を $f(x)$ とするとき，$f(1)>8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$ である．また，$f(1)>8$ となるときに，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx>17$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}$ である．

(2) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．次に，取り出したカードを箱に戻さずに残りの 15 枚から 1 枚取り出す．最初に取り出したカードに印刷されている関数を $f_1(x)$，2 枚目の関数を $g_1(x)$ とするとき，$f_1(0)>g_1(0)$ かつ $f_1(2)>g_1(2)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}\boxed{(21)}}$ である．

(3) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．次に，取り出したカードを箱に戻してよく混ぜてから 1 枚取り出す．最初に取り出したカードに印刷されている関数を $f_2(x)$，2 枚目の関数を $g_2(x)$ とするとき，$f_2(0)>g_2(0)$ かつ $f_2(2)>g_2(2)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$ である．また，$0\leqq x\leqq 2$ を満たすすべての実数 x に対して $f_2(x)>g_2(x)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(27)}}{\boxed{(28)}\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$ である．

[3] r を 1 でない正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とし，さらに $S_0=0$ と定める．また，関係式

$$S_n=\frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2}-\frac{a_{n+1}}{1-r} \quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つとする．

(1) $a_1=\boxed{(31)}$ であり，$a_{n+1}=\boxed{(32)}\,ra_n+\boxed{(33)}\,r^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ となるので，$b_n=\dfrac{a_n}{r^{n-1}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{(34)}$，公差 $\boxed{(35)}$ の等差数列になる．よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{(36)}\,nr^{n-1}$ であり，①から

$$S_n=\frac{\boxed{(37)}-\left(n+\boxed{(38)}\right)r^n+\left(n+\boxed{(39)}\right)r^{n+1}}{(1-r)^2} \quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

となる．

(2) $n \geqq 1$ に対して $T_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k$ とする．また，$a_0=0$ と定めると，$n \geqq 1$ に対して $T_n=\sum_{k=1}^{n+1} ka_{k-1}$ と表すこともできる．関係式

$$(k+1)a_k-rka_{k-1}=\boxed{(40)}\,a_k \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

を用いると，

$$(1-r)T_n=\boxed{(41)}\,S_n-r\left(n+\boxed{(42)}\right)a_{n+p} \quad (n=1,2,3,\ldots) \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

となる．ここで，$p=\boxed{(43)}$ である．

(3) ②, ③から，$n \geqq 1$ に対して

$$T_n=\frac{1}{(1-r)^q}\left\{\boxed{(44)}-\boxed{(45)}\,(n+1)\left(n+\boxed{(46)}\right)r^n +\boxed{(47)}\,n\left(n+\boxed{(48)}\right)r^{n+1}-\boxed{(49)}\,n\left(n+\boxed{(50)}\right)r^{n+2}\right\}$$

となる．ここで，$q=\boxed{(51)}$ である．

[4] x の関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=2^x-2^{-x}$ によって定める.

(1) 等式

$$\log_{\frac{1}{2}}\{f(x)-2\}+\log_2\left\{f(x-1)-\frac{3}{2}\right\}+2\log_4\{f(x)+g(x)-2\}=1$$

を満たす実数 x をすべて求めよ.

(2) $f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$ の値を求めよ.

(3) 実数 α, β に対して, $f(\alpha+\beta)$ と $g(\alpha+\beta)$ をそれぞれ $f(\alpha), g(\alpha), f(\beta), g(\beta)$ を用いて表せ.

[5] 座標空間の原点Oを中心とする半径1の球面をSとし，2点A$(6,0,0)$, B$(3,-6,-6)$を通る直線をℓとする．また，Aを頂点とし，底面の中心がℓ上にある直円錐(すい)Cに，Sが2点P, Qでのみ内接しているとする．ただし，PはCの底面上にあるとする．

(1) S上の点とℓ上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ．

(2) P, Qの座標をそれぞれ求めよ．

(3) Cの体積を求めよ．

[6] x の整式 $F(x)$ は x および $x-1$ で割り切れ，商をそれぞれ $P(x)$, $Q(x)$ とすると $P(0)=-4$, $Q(1)=2$ を満たしている．このような $F(x)$ のうち次数が最小のものを $f(x)$ とする．また，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) C 上の点 $\bigl(r, f(r)\bigr)$ における C の接線の傾きと y 切片をそれぞれ r の整式で表せ．

(3) 点 (s, t) を通る C の接線がちょうど 2 本存在するとき，s, t の満たす条件を求めよ．