

[1] 実数 a に対して、座標平面上の直線 $y = ax$ を ℓ_a とする.

(1) 点 $(1, 3 + \sqrt{10})$ を中心とする円 C が ℓ_a と y 軸の両方に接するとき、 C の半径は $\boxed{(1)}$ であり、 a の値は $\boxed{(2)}$ である.

(2) $a = 2$ とする. ℓ_a と y 軸の両方に接する半径 2 の円の中心を頂点とする四角形の面積は $\boxed{(3)}\boxed{(4)}\sqrt{\boxed{(5)}}$ である.

(3) $a = \sqrt{3}$ とする. ℓ_a と y 軸の両方に接し、中心が第 1 象限にある 2 つの円 C_1, C_2 を考える. C_1 の半径を 1 とし、 C_1, C_2 と ℓ_a との接点をそれぞれ P_1, P_2 とする. 線分 P_1P_2 の長さが 4 であるとき、 C_2 の半径は $\boxed{(6)} + \boxed{(7)}\boxed{(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}$ である.

[2] t の関数 $f(t)$ は定数関数でないとし、すべての実数 α, β に対して次を満たすとする.

$$f(\alpha) \geq 1, \quad 2f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$$

(1) $f(0) = \boxed{(10)}$ であり, $f(2\alpha) = \boxed{(11)} \{f(\alpha)\}^2 + \boxed{(12)} \boxed{(13)}$ が成り立つ.

(2) 方程式 $x + \frac{1}{x} = 2f(\alpha)$ を満たす x を考える. 等式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \boxed{(14)} \boxed{(15)}$$

を用いると, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{(16)} f(\boxed{(17)} \alpha)$ となることがわかる.

(3) さらに, 等式

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(18)} \boxed{(19)} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

を用いると, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{(20)} f(\boxed{(21)} \alpha)$ となることがわかる.

(4) (2), (3) より, 一般に, 自然数 n に対して

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \boxed{(22)} f(\boxed{(23)} n\alpha) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つと推測される. この推測が正しいことを次のように確かめる.

$n = 1, 2, 3$ のとき $\textcircled{1}$ は成り立つ. 3 以上の自然数 k に対して, $n = k - 1$ および

$n = k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると, 等式

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(24)} \boxed{(25)} \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

より, $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \boxed{(26)} f(\boxed{(27)} (k + \boxed{(28)}) \alpha)$ が成り立つことがわかる.

よって, $n = k + 1$ のときにも $\textcircled{1}$ は成り立つ.

(5) $S_n = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k\alpha)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) とする. $f(\alpha) > 1$ のとき,

$$S_n = \frac{1 + \boxed{(29)} \boxed{(30)} f(\alpha) + \boxed{(31)} \boxed{(32)} f((n-1)\alpha) + \boxed{(33)} \boxed{(34)} f(n\alpha)}{\boxed{(35)} \{1 - f(\alpha)\}}$$

となる.

- [3] 下図のような0から5までの番号のついたマスを使い，A, Bの2人が次のルールですごくゲームを行う．

0	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---

最初0番のマスにAとBの駒^{こま}がある．AとBは交互にさいころを投げるものとし，Aがさいころを投げてゲームを開始する．AとBのどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，Aの駒を1つ先の番号のマスに動かし，Bの駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，Aの駒は投げる前にあったマスから動かさず，Bの駒を1つ先の番号のマスに動かす．駒が先に5番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数はAとBの投げた回数の合計とする．

- (1) さいころをちょうど9回投げたときにAが上がる確率は $\frac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

- (2) ゲームを開始してから終了するまでAとBの駒があるマスの番号の差が常に1以下である確率は $\frac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

- (3) ゲームを開始してからさいころを4回投げたときまで常にBが先行する確率は $\frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，Bの駒があるマスの番号がAの駒があるマスの番号より大きいとき，Bが先行するという．

- (4) Aが先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを4回投げたときまで常にBが先行していた確率は $\frac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

[4] O を原点とする座標空間の 2 点 $A\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(-1, 2, \frac{3}{2}\right)$ を通る直線を ℓ とする.
また, xy 平面上に点 $C(9, -3, 0)$ をとる.

(1) ℓ と yz 平面の交点の座標を求めよ.

(2) 点 C と ℓ 上の点 P を結ぶ線分 CP の長さが最小となるとき, P の座標を求めよ.

(3) 中心が直線 OC 上にある半径 1 の球面を S とする. S と ℓ が異なる 2 点 Q, R で交わるとき, 線分 QR の長さが最大となる S の中心の座標と, 線分 QR の長さの最大値を求めよ.

[5] a, x, y は実数の定数とし, $0 < a < 1$, $0 \leq y < 2\pi$ を満たすとする. 複素数 z を

$$z = a^x \cos y + (a^x \sin y) i$$

によって定める. ただし, i は虚数単位である.

- (1) $z\bar{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ. ただし, \bar{z} は z と共役な複素数を表す.
- (2) $x = 0$ のとき, $z^2 + \bar{z} = 0$ を満たす y の値をすべて求めよ.
- (3) \bar{z} の実部が \bar{z} の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ.
- (4) 複素数 w を $w = \log_a(a^x \cos y) + \{\log_a(a^x \sin y)\} i$ によって定める. w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ.

[6] x の関数 $F(x)$ を

$$F(x) = |x + 1| + \int_{-1}^x (1 - |t|) dt$$

によって定める.

- (1) x の値について場合分けをして, それぞれの場合に $F(x)$ を x の整式で表せ.
- (2) 曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.
- (3) 曲線 $y = F(x)$ 上の 2 点 $A(a, F(a))$, $B(b, F(b))$ を通る直線の傾きを m とする.
ただし, $a < b$ とする. A, B を結ぶ線分の midpoint が $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ であるとき, b と m のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ.