注　意　問題**1**，**2**，**3**，**4**，**5** の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）〜（ヒ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　2016 の正の約数は全部で $\boxed{\text{（ア）}}$ 個あり，それらの平均は $\boxed{\text{（イ）}}$ である。

（2）　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。座標平面上に 3 点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{P}_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ がある。x 軸に関して，点 P_2，P_1 と対称な点をそれぞれ P_3，P_4 とし，さらに，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積を $S_1(\theta)$，三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4$ の面積を $S_2(\theta)$ とする。

（i）　$S_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{\text{（ウ）}}$ である。

（ii）　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)}=\boxed{\text{（エ）}}$ である。

（iii）　$S_1(\theta)$ は $\cos\theta=\boxed{\text{（オ）}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{（カ）}}$ をとる。

2

$f(x)$ は 2 次関数であり，$f(0)=f(1)=0$ を満たすとする。

（1） $a=\dfrac{1}{2}f''(0)$ とする。このとき，$f(x)$ は a を用いて $f(x)=\boxed{\text{（キ）}}$ と表される。

（2） 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx$$

の値が最も小さくなるのは $f(x)=\boxed{\text{（ク）}}$ のときである。また，そのときの定積分の値は $\boxed{\text{（ケ）}}$ である。

以下では，$f(x)=\boxed{\text{（ク）}}$，$m=\boxed{\text{（ケ）}}$ とする。

（3） 関数 $h(x)$ は $h(0)=h(1)=0$ を満たし，その導関数 $h'(x)$ は連続であるとする。さらに，I と J を

$$I=\int_0^1 \{(f'(x)+h'(x)-x)^2-(f(x)+h(x))\}\,dx$$
$$J=\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx+\int_0^1 (h'(x))^2dx$$

で定める。このとき，等式

$$I=J$$

を証明しなさい。

（4） 関数 $g(x)$ は $g(0)=g(1)=0$ を満たし，その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする。このとき，不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x)-x)^2-g(x)\}\,dx \geqq m$$

を証明しなさい。

3

6 枚の硬貨に 1 から 6 まで番号を 1 つずつ付け，はじめにすべて表向きにして並べておき，以下の操作を繰り返す。

操作

さいころを 2 個投げて出た目の小さい方から大きい方までの番号の硬貨を裏返す。
ただし，2 個のさいころの目が同じ場合はその番号の硬貨のみを裏返す。

たとえば，1 回目にさいころを 2 個投げて 2 と 4 の目が出たとすると，番号 2，3，4 の硬貨を裏返すので硬貨の向きは番号 1 の硬貨から順に表，裏，裏，裏，表，表となる。続いて 2 回目にさいころを 2 個投げて 2 個とも 3 の目が出たとすると，番号 3 の硬貨のみを裏返すので硬貨の向きは番号 1 の硬貨から順に表，裏，表，裏，表，表となる。

(1)　1 回目の操作を終えたとき番号 3 の硬貨の向きが表である確率は $\boxed{\text{（コ）}}$ であり，2 回目の操作を終えたとき番号 3 の硬貨の向きが表である確率は $\boxed{\text{（サ）}}$ である。また，2 回目の操作を終えたとき番号 3 と番号 4 の硬貨のうち少なくとも一方の向きが表である確率は $\boxed{\text{（シ）}}$ である。

(2)　n 回目の操作を終えたとき番号 3 と番号 4 の 2 つの硬貨の向きがともに表である確率を p_n，ともに裏である確率を q_n とする。このとき，関係式

$$p_{n+1}-q_{n+1}=\boxed{\text{（ス）}}(p_n-q_n)+\boxed{\text{（セ）}}$$
$$p_{n+1}+q_{n+1}=\boxed{\text{（ソ）}}(p_n+q_n)+\boxed{\text{（タ）}}$$

が成り立ち，p_n を n を用いて表すと $p_n=\boxed{\text{（チ）}}$ となる。ただし，$\boxed{\text{（ス）}}$ ～ $\boxed{\text{（タ）}}$ には数を記入すること。

4

i を虚数単位とする。次の事実がある。

事実 F

a, b を互いに素な正の整数とする。このとき,

$$\left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{b}\pi+i\sin\frac{2}{b}\pi$$

となる整数 k が存在する。

(1) 等式

$$\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)^k=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

を満たす最小の正の整数 k は $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

(2) a, b を互いに素な正の整数とし，集合 P を

$$P=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos\frac{2a}{b}\pi+i\sin\frac{2a}{b}\pi\right)^k \text{ と表される複素数}\right\}$$

で定める。事実 F を考慮すると，集合 P の要素の個数 $n(P)$ は $\boxed{\text{（テ）}}$ である。

(3) 事実 F を証明しなさい。

(4) a_1, b_1 を互いに素な正の整数とし，a_2, b_2 も互いに素な正の整数とする。集合 Q_1 と Q_2 を

$$Q_1=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos\frac{2a_1}{b_1}\pi+i\sin\frac{2a_1}{b_1}\pi\right)^k \text{ と表される複素数}\right\}$$

$$Q_2=\left\{z\ \middle|\ z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left(\cos\frac{2a_2}{b_2}\pi+i\sin\frac{2a_2}{b_2}\pi\right)^k \text{ と表される複素数}\right\}$$

で定め，集合 R を

$$R=\{z \mid z \text{ は集合 } Q_1 \text{ の要素と集合 } Q_2 \text{ の要素の積で表される複素数}\}$$

で定める。b_1 と b_2 が互いに素ならば，集合 R の要素の個数 $n(R)$ は $\boxed{\text{（ト）}}$ である。b_1 と b_2 が互いに素でないとき，それらの最大公約数を d とすれば，集合 R の要素の個数 $n(R)$ は $\boxed{\text{（ナ）}}$ である。

5

四面体 OABC の 4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=\sqrt{10}$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=3$ であるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$ $\boxed{\text{（ニ）}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{（ヌ）}}$ である。

いま，3 点 A，B，C を通る平面を α とし，点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=$ $\boxed{\text{（ネ）}}$ と表される。また，四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{（ノ）}}$ である。

次に，線分 AH と線分 BC の交点を P，点 P から線分 AC に下ろした垂線を PQ とすると，PQ の長さは $\boxed{\text{（ハ）}}$ である。また，2 点 P，Q を通り平面 α に垂直な平面による四面体 OABC の切り口の面積は $\boxed{\text{（ヒ）}}$ である。