［Ⅰ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし設問（2）の空欄（え）には選択肢より適切な数を選んで記入しなさい。

（1） 定員2名，3名，4名の3つの部屋がある。

（i） 2人の教員と7人の学生の合計9人をこれらの3つの部屋に定員どおりに入れる割り当て方は $\boxed{\text{（あ）}}$ とおりである。また，その割り当て方のなかで2人の教員が異なる部屋に入るようにする割り当て方は $\boxed{\text{（い）}}$ とおりである。

（ii） 7人の学生のみを，これらの3つの部屋に定員を超えないように入れる割り当て方は $\boxed{\text{（う）}}$ とおりである。ただし誰も入らない部屋があってもよい。

（2） 二元一次不定方程式 $13x+11y=c$ は $c=\boxed{\text{（え）}}$ のとき $x>0$，$y>0$ なる整数解をちょうど1組もつ。そのときの解は $(x,\ y)=\left(\boxed{\text{（お）}},\ \boxed{\text{（か）}}\right)$ である。

（え）の選択肢	222	223	224

（3） すべての実数 m に対して

$$f(m)=\int_0^1 |e^x-m|e^x\,dx$$

により定義される関数 $f(m)$ は，$m=\boxed{\text{（き）}}$ において最小値 $\boxed{\text{（く）}}$ をとる。

［II］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形 ABC の頂点上に置かれた点 P に対する次の操作 T を考える。

操作 T

(T1) 点 P が頂点 A 上に置かれているときは，確率 $\frac{1}{2}$ でそのままにしておき，確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B 上に移す。

(T2) 点 P が頂点 B 上に置かれているときは，確率 $\frac{1}{2}$ でそのままにしておき，確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 C 上に移す。

(T3) 点 P が頂点 C 上に置かれているときは，必ず頂点 A 上に移す。

以下 n，m を自然数とし，点 P を頂点 A 上に置いて，操作 T を繰り返し行う。操作 T を n 回繰り返し終えたとき，点 P が頂点 A 上に置かれている確率を a_n，頂点 B 上に置かれている確率を b_n，頂点 C 上に置かれている確率を c_n とする。

(1)　$n \geqq 2$ のとき a_n，b_n，c_n を a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1} で表すと

$$\begin{cases} a_n = \boxed{\text{(あ)}}\ a_{n-1} + \boxed{\text{(い)}}\ c_{n-1} \\ b_n = \boxed{\text{(う)}}\ a_{n-1} + \boxed{\text{(え)}}\ b_{n-1} \\ c_n = \boxed{\text{(お)}}\ b_{n-1} + \boxed{\text{(か)}}\ c_{n-1} \end{cases}$$

である。

(2)　(1) より a_n，b_n を求めると，$a_{2m-1} = \boxed{\text{(き)}}$，$b_{2m-1} = \boxed{\text{(く)}}$ であり，$a_{2m} = \boxed{\text{(け)}}$，$b_{2m} = \boxed{\text{(こ)}}$ である。

(3)　操作 T を n 回繰り返し終えたとき初めて点 P が頂点 C 上に置かれる確率を d_n とすると，$d_n = \boxed{\text{(さ)}}$ である。

(4)　操作 T を n 回繰り返し終えたとき点 P が頂点 A または B の上に置かれ，かつそれまでに 1 回だけ頂点 C 上に置かれていた確率を e_n とすると，$e_n = \boxed{\text{(し)}}$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

$l \geqq 1$ を定数とし，座標空間の点Aは平面 $z=-1$ 上を，点Bは平面 $z=1$ 上を，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=l$ をみたしつつ動くとする。ただしOは座標空間の原点である。

（1） $\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ となるように点A，Bを選ぶことができるためには $l \geqq$ $\boxed{\text{（あ）}}$ であることが必要十分である。また，点A，Bから xy 平面へ垂線を下ろし，それぞれと xy 平面との交点を A′，B′ とするとき，$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $\cos\angle \mathrm{A'OB'}=\dfrac{2}{3}$ となるように点A，Bを選ぶことができるのは $l=$ $\boxed{\text{（い）}}$ のときである。

（2） $l=$ $\boxed{\text{（い）}}$ のとき，点A，B，Cの座標を

$$\mathrm{A}\left(0,\ \boxed{\text{（う）}},\ -1\right),\ \mathrm{B}\left(\boxed{\text{（え）}},\ \boxed{\text{（お）}},\ 1\right),\ \mathrm{C}\left(\boxed{\text{（か）}},\ \boxed{\text{（き）}},\ \boxed{\text{（く）}}\right)$$

とするとOABCは正四面体をなす。ただし $\boxed{\text{（う）}}$，$\boxed{\text{（え）}}$，$\boxed{\text{（く）}}$ はいずれも正とする。

また，正四面体OABCを平面 $y+3z=t$ で切ったときの切り口は $\boxed{\text{（け）}} < t < \boxed{\text{（こ）}}$ のとき四角形となる。その四角形は上底と下底の和が $\boxed{\text{（さ）}}$，高さが $\boxed{\text{（し）}}$ の台形であり，その面積は $t=$ $\boxed{\text{（す）}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{（せ）}}$ をとる。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問（3）に答えなさい。

時間 t とともに座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(t)$ は次の条件（i）をみたすとする。

（i） $\mathrm{P}(t)$ は原点をとおらず，その偏角 $\theta(t)$ および原点からの距離 $r(t)$ は t について微分可能，かつ $r(0)=1$ であり，さらに $\theta'(t)=1$ が成り立つ。

（1） 動点 $\mathrm{P}(t)$ の座標を $(x(t),\ y(t))$ とし，時刻 t における $\mathrm{P}(t)$ の速度ベクトル $\vec{v}(t)=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ とベクトル $\vec{b}(t)=(\cos\theta(t),\ \sin\theta(t))$ のなす角を $\alpha(t)$ とする。このとき $\cos\alpha(t)$ を $r(t)$ を用いて表すと $\cos\alpha(t)=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（2） 動点 $\mathrm{P}(t)$ がさらに次の条件（ii）をみたすとする。

（ii） すべての t に対して $\alpha(t)=\dfrac{\pi}{4}$ である。

このとき $r(t)=$ $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（3） 条件（i），（ii）をみたす2つの動点 $\mathrm{P}_1(t)$，$\mathrm{P}_2(t)$ の間に次の条件（iii）が成り立つとする。ただし動点 $\mathrm{P}_1(t)$，$\mathrm{P}_2(t)$ それぞれの偏角を $\theta_1(t)$，$\theta_2(t)$，原点からの距離を $r_1(t)$，$r_2(t)$ とし，速度ベクトルを $\vec{v}_1(t)$，$\vec{v}_2(t)$ とする。

（iii） すべての t に対してベクトル $\vec{v}_1(t)$ とベクトル $\vec{v}_2(t)$ は垂直である。

このとき時刻 s から u の間に動点 $\mathrm{P}_2(t)$ がその軌道に沿って動く道のりを $l(s,\ u)$ とすると

$$l(s,\ u)=\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1(u)\mathrm{P}_2(u)}\right|-\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1(s)\mathrm{P}_2(s)}\right|$$

が成り立つことを示しなさい。ただし $s<u$ とする。