I

(1) $\mathrm{AB}=3, \mathrm{BC}=4, \mathrm{CD}=5, \mathrm{DA}=6$ をみたす四角形 ABCD を考える．この四角形の面積を F とすると

$$F = \boxed{(1)}\boxed{(2)}\ \sin B + \boxed{(3)}\boxed{(4)}\ \sin D$$

が成り立つ．余弦定理を用いれば

$$F^2 = \boxed{(5)}\boxed{(6)}\boxed{(7)} - \boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)}\ \cos(B+D)$$

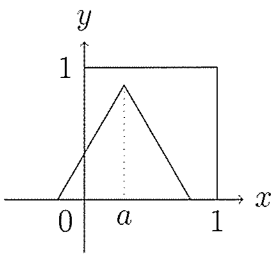
を得る．$B+D=\pi$ のとき，F は最大値

$$6\sqrt{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}$$

をとる．

(2) 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正四面体 F がある．F の内部に中心をもち，F のどの辺とも高々 1 点を共有する球を考える．これらの球の中で最大のものを B とすれば，B の体積は $\boxed{(13)}\sqrt{\boxed{(14)}}\ \pi$ である．

II　下図のように，ともに 1 辺の長さが 1 の正方形と正三角形がある．正三角形は第 1 象限と第 2 象限にあり，底辺は x 軸上にある．底辺の中点を $(a, 0)$ とする．



正方形と正三角形の共通部分の面積を $S(a)$ とすると

$$S(a) = \begin{cases} 0 & a < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{\boxed{(15)}}}{\boxed{(16)}}\left(a + \dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}\right)^2 & -\dfrac{1}{2} \leqq a < \boxed{(19)} \\ \dfrac{\sqrt{\boxed{(20)}}}{\boxed{(21)}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a - \dfrac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}\right)^2 & \boxed{(19)} \leqq a < \boxed{(24)} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a - \dfrac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}}\right)^2 & \boxed{(24)} \leqq a < \dfrac{3}{2} \\ 0 & a \geqq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

であり

$$\int_{-1}^{1} S(a)da = \frac{\sqrt{\boxed{(27)}}}{\boxed{(28)}}$$

である．

III　道路によって4つの区画に区分されている次ページの地形の町を考える．図の各線分は道路を表す．各区画は道路に囲まれた辺の長さが 1 km の正方形である．K さんは $(0,0)$ から，O さんは $(2,2)$ からそれぞれ出発して，道路を移動する．K さんも O さんも 1 km 移動するには $\frac{1}{4}$ 時間かかる．K さんと O さんは，同時に出発し，初めて出会った地点で移動を停止する．ただし，K さんと O さんはつぎのルールにしたがって移動する．

- K さんの移動ルール：

  K さんは $(0,0)$ から出発し $(2,2)$ に向かって北または東に移動する (両方向に移動できる場合，いずれかの方向を $\frac{1}{2}$ の確率で選択する)．O さんに出会う前に $(2,2)$ に到達したら，$(2,2)$ から再出発し $(0,0)$ に向かって南または西に移動する．これを O さんに出会うまで繰り返す．

- O さんの移動ルール：

  O さんは $(2,2)$ から出発し $(0,0)$ に向かって南または西に移動する (両方向に移動できる場合，いずれかの方向を $\frac{1}{2}$ の確率で選択する)．K さんに出会う前に $(0,0)$ に到達したら，$(0,0)$ から再出発し $(2,2)$ に向かって北または東に移動する．これを K さんに出会うまで繰り返す．

(1) 出発して t 時間後の時点を時刻 t とよぶ．K さんと O さんが時刻 $\frac{1}{2}$ に出会うことができる地点は，$(0,2),(2,0),(1,1)$ であり，それらの地点で初めて出会う確率は順に

$$\frac{\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}\boxed{(31)}},\ \frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}},\ \frac{\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}$$

である．

(2) K さんと O さんが出会うことができる時刻は $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ であり，それらの時刻で初めて出会う確率は，順に

$$\frac{3}{8},\ \frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{64},\ \frac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}\boxed{(44)}},\ldots$$

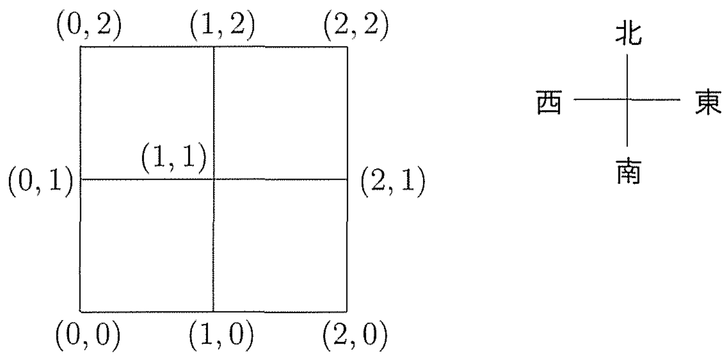
である．

(3) 時刻 2 までに出会えない場合, 出会うことをあきらめ, 両者とも時刻 2 で移動を停止するとしよう. このとき, 両者が移動を停止するまでにかかる時間の期待値は $\dfrac{\boxed{(45)}\boxed{(46)}\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}\boxed{(49)}\boxed{(50)}}$ となる.

(4) 時刻 2 を過ぎてもあきらめずに移動し続けるとしよう. 時刻 12 まで移動を続けても, 両者が出会えない確率は

$$\left(\frac{\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}}\right)^{12}$$

となる.



IV　ある村では公共サービス X と Y を提供している．提供された X の量を x, Y の量を y で表わす．技術的条件や予算の制約によって (x, y) が実現するのは x, y がつぎの不等式をみたすときである．

$$x + y \leqq 200$$

$$x + 5y \leqq 790$$

$$3x + 4y \leqq 720$$

$$x, y \geqq 0$$

(x, y) が実現する領域は 5 角形であり，その 5 頂点は $(0, 0)$, $(200, 0)$, $(0, 158)$ および A($\boxed{(53)}\boxed{(54)}\boxed{(55)}$, $\boxed{(56)}\boxed{(57)}\boxed{(58)}$), B(80, $\boxed{(59)}\boxed{(60)}\boxed{(61)}$) である．

現在，一般の村民は xy が最大になることを望んでおり，一方，村の有力者一族は $x + 10y$ が最大になることを望んでいる．村長は x と y を自由に選ぶことができるが，両方の意向を尊重して

$$\alpha xy + (1 - \alpha)(x + 10y) \quad (0 < \alpha < 1)$$

を最大化する方針をとった．

仮に，$\alpha = \dfrac{1}{3}$ ならば村長の選択は $(x, y) = (\boxed{(62)}\boxed{(63)} , \boxed{(64)}\boxed{(65)}\boxed{(66)})$ となる．

村長は最大化のために選択すべき点を線分 AB 上にとることにした．しかし，予算上端点 A も B も選択することが認められないことがわかった．すると，α は

$$\frac{\boxed{(67)}\boxed{(68)}}{\boxed{(69)}\boxed{(70)}\boxed{(71)}} < \alpha < \frac{\boxed{(72)}\boxed{(73)}}{133}$$

の範囲に限定される．

V　つぎの **1**, **2** のうち, いずれか1問を選択し答えなさい. **1** を選択する場合, 解答用紙の V−1 をマークし, **2** を選択する場合, V−2 をマークしなさい.

1

1)　計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2 = \boxed{(101)}\boxed{(102)}\boxed{(103)}\boxed{(104)}$$

2)　計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k-1}k^2 = \boxed{(105)}\boxed{(106)}\boxed{(107)}\boxed{(108)}$$

3)　1から20までの数を2つの数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ と $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ に分ける.

$$S = \sum_{k=1}^{10} a_k b_k$$

と定義し, 分け方を種々考え, S の最小値と最大値を求めると, それぞれ

$$\boxed{(109)}\boxed{(110)}\boxed{(111)}\ , \quad \boxed{(112)}\boxed{(113)}\boxed{(114)}\boxed{(115)}$$

となる. (ヒント: 増加数列や減少数列を考える.)

2　つぎのプログラムは DATA 文で与えられた最大 100 個の数の最大値と最小値と中央値を求めるものである. DATA 文では最初に与える数の個数を与えるものとする.

このプログラムでは, 与えられた数をバブルソートを用いて小さい順に並び替えている. バブルソートでは隣り合う数を比べて順番に並んでいないときに交換することを繰り返すことで並び替える.

プログラムの空欄に入るもっとも適切な選択肢を選び, その番号を解答欄に答えなさい.

```
100 DIM A(100)
110 READ N
120 FOR I = 1 TO N
130 READ A(I)
140 NEXT I
150 LET C = 1
160 FOR I = 1 TO N - 1
170 IF A(I) <= A([(201)(202)])  THEN GOTO 220
180 LET B = A(I)
190 LET A(I) = A(I + 1)
200 LET A(I + 1) = B
210 LET C = 0
220 NEXT I
230 IF C = [(203)(204)] THEN GOTO 150
240 PRINT "最大値 = "; A([(205)(206)])
250 PRINT "最小値 = "; A([(207)(208)])
260 LET M = INT(N /2)
270 IF N / 2 = [(209)(210)] THEN GOTO 300
280 LET B = A([(211)(212)])
290 GOTO 310
300 LET B = (A(M) + A([(213)(214)])) / 2
310 PRINT "中央値 = "; B
320 END
500 DATA 20
510 DATA 31, 41, 59, 26, 53, 58, 97, 93, 23, 84
520 DATA 62, 64, 33, 83, 27, 95, 2, 88, 41, 97
```

[選択肢]

(10) `0`	(11) `1`	(12) `2`	(13) `-1`
(14) `B`	(15) `C`	(16) `M`	(17) `N`
(18) `I`	(19) `I - 1`	(20) `I + 1`	(21) `N - 1`
(22) `N + 1`	(23) `M - 1`	(24) `M + 1`	(25) `M * 2`