

I. O を原点とする座標空間に、2 点 A (0,1,2), B (1,2,0) がある。

(i) $\triangle OAB$ の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{(1)} \cdots \boxed{(2)}}}{\boxed{(3)}}$ である。

(ii) 点 C の位置を、位置ベクトル

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OB}$$

によって定める。このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle OAB$ の面積の比は

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle OAB} = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}$$

である。

(iii) 2 つのベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} の両方に垂直な単位ベクトルのうちの 1 つは、

$$\frac{\sqrt{\boxed{(6)} \cdots \boxed{(7)}}}{21} (\boxed{(8)}, -\boxed{(9)}, 1)$$

である。

(iv) t を実数として、点 D $\left(\frac{t^2}{4}, 4t, 19\right)$ を定める。このとき、四面体 ABCD の体積 $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)} \cdots \boxed{(12)}} (t^2 - \boxed{(13)} t + \boxed{(14)} \cdots \boxed{(15)})$$

である。

(v) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{n+1}{10} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $V(a_n)$ は、 $n = \boxed{(16)}$ で最小となる。

II. 半径 1 の円周上に 8 個の点があり、それぞれの点は隣り合う点とすべて等間隔に配置されている。それらの点には、反時計回りに 1 から 8 までの番号が順番についている。また、中が見えない袋の中に、8 個の球が入っていて、それらの球には、1 から 8 の番号が 1 つずつ書かれている。

(i) 袋から同時に 3 つの球を取り出すとき、取り出した球と同じ番号のついた円周上の 3 点を頂点とする三角形の作り方は、全部で (17) ⋮ (18) 通りある。このとき、作られた三角形の面積と、その面積が得られる確率の一覧表を作ることができる。以下の表を、上から下に面積の小さい順に並べて完成させなさい。

面積	確率
$\frac{\sqrt{\text{ (19) } - \text{ (20) }}}{\text{ (21) }}$	$\frac{\text{ (22) }}{\text{ (23) }}$
$\frac{\text{ (24) }}{\text{ (25) }}$	$\frac{\text{ (26) }}{\text{ (27) }}$
$\frac{\sqrt{\text{ (28) }}}{\text{ (29) }}$	$\frac{\text{ (30) }}{\text{ (31) }}$
$\frac{\text{ (32) }}{\text{ (32) }}$	$\frac{\text{ (33) }}{\text{ (34) }}$
$\frac{\sqrt{\text{ (35) } + \text{ (36) }}}{\text{ (37) }}$	$\frac{\text{ (38) }}{\text{ (39) }}$

(ii) 袋から同時に 4 つの球を取り出すとき、取り出した球と同じ番号のついた円周上の 4 点を頂点とする四角形の作り方は、全部で

(40)	⋮	(41)
------	---	------

 通りある。このとき、作られた四角形の面積と、その面積が得られる確率の一覧表を作ることができる。以下の表を、上から下に面積の小さい順に並べて完成させなさい。

面積	確率
$\frac{\sqrt{\boxed{(42)}}}{\boxed{(43)}}$	$\frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)} \cdots \boxed{(46)}}$
$\frac{\sqrt{\boxed{(47)}} + \boxed{(48)}}{\boxed{(49)}}$	$\frac{\boxed{(50)} \cdots \boxed{(51)}}{\boxed{(52)} \cdots \boxed{(53)}}$
$\sqrt{\boxed{(54)}}$	$\frac{\boxed{(55)}}{\boxed{(56)} \cdots \boxed{(57)}}$
$\frac{\sqrt{\boxed{(58)}} + \boxed{(59)}}{\boxed{(60)}}$	$\frac{\boxed{(61)} \cdots \boxed{(62)}}{\boxed{(63)} \cdots \boxed{(64)}}$
$\boxed{(65)}$	$\frac{\boxed{(66)}}{\boxed{(67)} \cdots \boxed{(68)}}$

III. M社はブドウを栽培し、それを原料にしたワインを醸造して世界中に販売している、としよう。一般には、企業の業績には、社内のさまざまな活動だけでなく、社外の要因も大きくかかわっている。しかしながら、ここでは、問題が複雑にならないように、一部の活動に限定して、M社の醸造計画を考えてみよう。

栽培および醸造において、量と質には、醸造量が増えれば増えるほどワインの品質が低下する、という関係があると仮定する。この関係は、

$$q = a - bx$$

という単純な式で表されたとする。ここで、 x はワインの醸造量（リットル）、 q はワインの品質の高さを表すM社が独自に定めた指標とし、 a と b は正の実数とする。また、変数 x のとり得る値の範囲は、 x と q がともに正の値となる範囲とする。

醸造されるワインはすべて同一の品質で、同一の価格で販売されるものとし、その価格を p （円／リットル）で表す。市場において、品質の高いワインは希少性が増すため、その価格は非常に高いものになる。この関係は、

$$p = cq^2$$

で表されたと仮定する。ただし、 c は正の実数とする。また、醸造されたワインは、上記で定まる価格で、すべて残らずに販売されてしまうものとする。

M社は、以上の諸条件を前提にして、その年の栽培および醸造を行う。すなわち、醸造量を x と決め、それに応じて適切な栽培および醸造を行うことにより、品質の指標が q となるワインを作り、その全量（すなわち x ）を品質の指標 q に応じた価格 p で販売し、売上高 $y = px$ （円）を得る。

(i) 売上高は,

$$x = \frac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}} \cdot \frac{a}{b} \quad (\text{リットル})$$

のとき, 最大値

$$\frac{\boxed{(71)}}{\boxed{(72)} \cdots \boxed{(73)}} \cdot \frac{ca \boxed{(74)}}{b} \quad (\text{円})$$

をとる。

- (ii) 次に, ワインを醸造するに際し, 技術上の制約や販売上の都合などの理由で, 醸造量の下限が設けられているとしよう。この下限を正の実数 m (リットル) で表す。 x の取り得る値の範囲には, x が m 以上という条件が追加されることになる。このときの売上高の最大値を \bar{y} で表し, それを与える醸造量を \bar{x} で表す。 \bar{x} は m の関数であるので, これを $\bar{x} = f(m)$ で表す。関数 $f(m)$ の定義域を $0 < m < \frac{a}{b}$ として, この関数のグラフを解答用紙 B の解答欄の所定の枠内に描きなさい。

同様に, \bar{y} も m の関数であるので, これを $\bar{y} = g(m)$ で表す。関数 $g(m)$ の定義域を $0 < m < \frac{a}{b}$ として, この関数のグラフを解答用紙 B の解答欄の所定の枠内に描きなさい。