

解答用紙 A (マークシート) の記入に関する注意事項

1. 問題の [1] から [3] の解答は、解答用紙 A (マークシート) の解答欄にマークしてください。

[例]

(11)	(12)
------	------

 と表示のある問いに対して、「34」と解答する場合は、右の例のように解答欄 (11) の ③ と解答欄 (12) の ④ にマークしてください。

なお、解答欄にある \ominus はマイナスの符号－を意味します。

(11)	(12)
①	①
②	②
③	③
④	④
⑤	⑤
⑥	⑥
⑦	⑦
⑧	⑧
⑨	⑨
⑩	⑩

2. 解答欄 (1), (2), … の一つ一つは、それぞれ 0 から 9 までの数字、またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します。それらを (1), (2), … で示された解答欄にマークしてください。

下の例のように、数字は右によせて表示し、マイナスの符号－は左端に置いてください。空のマスのあれば 0 を補ってください。解答が分数のときは、分母を正で、約分しきった形で解答してください。

[例]

$$3 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 1 \\ \hline \end{array} x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

[1] c を定数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{c + \sum_{k=1}^n 2^k}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1} = \boxed{(1)} + \frac{a_n}{\boxed{(2)}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす.

(2) a_n を n の式で表すと

$$a_n = 2 - \frac{\boxed{(3)} - c}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる. ゆえに, $c = \boxed{(4)}$ のとき数列 $\{a_n\}$ は公比 1 の等比数列になる.

(3) $c = 1$ とする. a_n が 1.99 を超えない最大の n は $\boxed{(5)}$ である.

(4) $c = -38$ とする. 自然数 N に対して, $\sum_{n=1}^N a_n$ の値は $N = \boxed{(6)}$ のとき最小値

$$\frac{\boxed{(7)}\boxed{(8)}\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}} \text{ をとる.}$$

[2] 硬貨を 1 枚投げて表が出れば A に 1 点, 裏が出れば B に 1 点を与えることを繰り返す. 硬貨を 5 回投げ終わった時点で A の得点は 3 点, B の得点は 2 点であった. なお, 硬貨は表裏が等しい確率で出るものとする.

(1) 6 回目以降, A, B のどちらかが 5 点を取るまでの各回の得点の与え方を樹形図で表すと, その場合の数は $\frac{(11)(12)}{(13)(14)}$ 通りであることがわかる. そして, A が B より先に 5 点を取る確率は $\frac{(13)(14)}{(15)(16)}$ である.

(2) 6 回目以降の各回の得点の与え方を次のように変更する. A は 1, 3, 5 と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入った袋から, B は 2, 4 と書かれたカードが 1 枚ずつ入った袋から, 中を見ずに 1 枚取り出し, 大きい数字の書かれたカードを取り出した方に 1 点を与える. このとき, 各回ごとに A が得点する確率は $\frac{(17)}{(18)}$ であり, A が先に 5 点を取る確率は $\frac{(19)(20)}{(21)(22)}$ である.

(3) 6 回目以降について, A の袋は (2) と同じとし, B の袋には 6 と書かれたカードを 1 枚追加して, (2) と同様に各回の得点の与え方を定める. このとき A が先に 5 点を取る確率は $\frac{(23)(24)}{(25)(26)}$ である.

[3] 実数 θ は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標空間の 3 点

$$A(\cos^2 \theta, \sin \theta, 1 + \sin^2 \theta), \quad B(\sin \theta, 0, -\sin \theta), \quad C(1, \cos 2\theta - \cos^2 \theta, 1)$$

に対し, それぞれ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく.

(1) \vec{b} は零ベクトルではないとする. 4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるならば,

$$\theta = \frac{\boxed{(27)} \boxed{(28)}}{\boxed{(29)}} \pi \text{ である.}$$

次に $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし, 以下このときの 3 点 A, B, C を考える. また, 3 点 O, B, C の定める平面を α とする.

(2) 点 P は α 上の点で, $|\overrightarrow{AP}|$ が最小になるものとする. このとき,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = \boxed{(30)}, \quad \overrightarrow{AP} \cdot \vec{c} = \boxed{(31)}$$

が成り立つ. また, \overrightarrow{OP} を \vec{b}, \vec{c} を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{(32)} \boxed{(33)}}{\boxed{(34)}} \vec{b} + \frac{\boxed{(35)} \boxed{(36)}}{\boxed{(37)} \boxed{(38)}} \vec{c}$$

となる. ただし, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ はベクトル \vec{u} と \vec{v} の内積を表す.

(3) 三角形 OBC の面積は $\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\boxed{(39)} \boxed{(40)}}{\boxed{(41)}}}$ であり, $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)} \boxed{(44)}}}$ なの

で, 四面体 $OABC$ の体積は $\frac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}}$ となる.

[4] 企業 X が n 個の新製品を同時に開発しており、各新製品の開発に成功する確率は $\frac{1}{9}$ である。すべての開発の結果が出た後に企業 X が存続できるための必要十分条件は、 n 個のうち 1 個以上の新製品の開発に成功していることである。ただし、各新製品の開発は独立な試行であるとする。企業 X が n 個の新製品すべての開発に失敗する確率を p_n 、また企業 X が存続できる確率を q_n とする。以下では、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。

(1) p_n, q_n をそれぞれ n を用いて表せ。

(2) $q_n \geq 0.9$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(3) $\frac{k}{1000} < q_{50} < \frac{k+1}{1000}$ を満たす自然数 k を求めよ。

[5] 方程式 $y = |x|$ を満たす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合 B を

$$B = \{(x, y) \mid \text{点 } (x, y) \text{ は方程式 } y = |x| \text{ を満たす}\}$$

と表す. 同様に, 集合 $C_r(a, b)$, D をそれぞれ

$$C_r(a, b) = \{(x, y) \mid \text{点 } (x, y) \text{ は方程式 } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ を満たす}\},$$

$$D = \{(x, y) \mid \text{点 } (x, y) \text{ は不等式 } y \leq |x| \text{ を満たす}\}$$

で定める. ただし, a, b は実数, r は正の実数とする.

(1) 集合 $B \cap C_r(1, 2)$ が 2 個の要素からなるように, r の値の範囲を定めよ.

(2) $C_{2\sqrt{2}}(a, b) \subset D$ が成り立つような点 (a, b) 全体の集合を斜線で図示せよ.

[6] a, b, c を実数とする. x の関数

$$F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

は $x = \alpha$ で極大になり, $x = \beta$ で極小になるとする. 曲線 $y = F(x)$ 上の点 $B(\beta, F(\beta))$ における接線を ℓ とし, ℓ と $y = F(x)$ の共有点のうち B と異なるものを $(\gamma, F(\gamma))$ とする.

(1) x の整式 $F(x) - F(\beta)$ を, β, γ を用いて 1 次式の積に因数分解された形で表せ.

(2) γ を α, β のみを含む式で表せ. 必要ならば x の整式で表される関数 $p(x), q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}' = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

を用いてもよい.

(3) $f(x) = F'(x)$ とする. 直線 $x = \gamma$, x 軸, および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形のうち $y \geq 0$ となる部分の面積 S を, α, β のみを含む式で表せ. さらに, $a - b \geq \frac{3}{2}$ が成り立つとき, S の最小値を求めよ.