I　n を自然数とする．表と裏が $\dfrac{1}{2}$ の確率で出現するコインを n 回繰り返し投げる試行をおこなう．各試行に対して n 個の数 $X_1, \ldots, X_n$ をつぎのように定義する．

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1}+1 & (i \text{ 回目の結果が表の場合}) \\ X_{i-1}+2 & (i \text{ 回目の結果が裏の場合}) \end{cases}$$

ただし $X_0 = 0$ とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ のいずれかが値 k $(1 \leqq k \leqq 2n)$ と等しくなる確率を $P(n, k)$ と記す．例えば，$n=1$ ならば $P(1,1) = \dfrac{1}{2}$, $P(1,2) = \dfrac{1}{2}$ となる．$n=2$ ならば $P(2,1) = \dfrac{1}{2}$, $P(2,4) = \dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}$ となる．

$3 \leqq k \leqq n$ とする．$X_i = k$ となるのは，$X_{i-1} = k-1$ で i 回目の結果が表となるか，あるいは $X_{i-1} = k-2$ で i 回目の結果が裏となるかのいずれかの場合である．したがって

$$P(n,k) = \frac{\boxed{(3)}}{\boxed{(4)}}\, P(n, k-1) + \frac{\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}\, P(n, k-2) \quad (3 \leqq k \leqq n)$$

が成り立つ．

いまコインを 10 回投げる試行を考える．このとき

$$P(10,2) = \frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}, \quad P(10,5) = \frac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}$$

である．

II

(1)　座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,0)$ と点 $\mathrm{A}(0,2)$ を通る 2 円

$$C_1:\ (x+1)^2+(y-1)^2=2,\quad C_2:\ (x-2)^2+(y-1)^2=5$$

が与えられている．原点 O を通る直線 L と C_1, C_2 との交点 $(\neq \mathrm{O})$ をそれぞれ D, E とする．$\mathrm{D}\neq\mathrm{E}$ のとき，線分 DE の内点 P を $\mathrm{DP}:\mathrm{PE}=3:1$ なるようにとる．$\mathrm{D}=\mathrm{E}$ のとき，$\mathrm{P}=\mathrm{D}$ とする．直線 L を原点を中心に回転させると，点 P は

$$\left(\frac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}},\ \boxed{(17)}\boxed{(18)}\right)$$

を中心とする円周上にある．

(2)　$\dfrac{\pi}{12}$ における $\sin, \cos$ の値は

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}-\sqrt{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}+\sqrt{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}}{4}$$

である．これを用いて，$0<x<\pi$ の範囲で方程式

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}-4\sqrt{2}=0$$

を解けば

$$x=\frac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}\,\pi$$

を得る．

III　3 次関数 $f(x)$ は $x=0$ で極小, $x=a>0$ で極大になるとする. また $x=b\,(\neq a)$ で $f(a)=f(b)$ が成り立つとする. $x=b$ における $y=f(x)$ の接線が y 軸と交わる点を $(0,c)$ とおく. もし 3 点 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(0,c)$ を 3 頂点とする三角形が二等辺三角形になるならば, 接線の傾きは

$$-2\sqrt{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}\ \text{または}\ -\sqrt{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$$

であり, それぞれに対応して, c の値は

$$c-f(a)=-\sqrt{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}\,a\ \text{または}\ -\frac{\sqrt{\boxed{(33)}}}{\boxed{(34)}}\,a$$

をみたす.

IV　銀行口座 (以降, 口座) から IC カードに金額を移転し, そのカードを用いて支払いをおこなうものとする. 口座からカードに移転した金額を超過してさらに支払う必要が生じた場合, その分は銀行が自動的に立て替えて払うものとする.

このとき, 口座からカードに金額を移転することに伴う利子収入の減少分, および銀行からの借入れに伴う利払い, そして口座からカードへの移転に伴う手数料, それらの合計 Z を最小にする問題を考える. 適当な仮定のもと, Z は独立変数 x, y の関数として, つぎのように表わされる.

$$Z = \frac{xy^2}{40A} + \frac{A^2 - 2xyA + x^2y^2}{30xA} + 6x$$

ただし (x, y) は座標平面の第 1 象限の点であり, A は定数である.

(1) x を固定し, Z を y の関数と考えれば, その最小値は

$$y = \frac{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}} \frac{A}{x}$$

のときである.

(2) Z に (1) の結果を代入し, Z を x のみの関数とみれば

$$x = \sqrt{\frac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}\boxed{(44)}} A}$$

のとき Z は最小になる.

(3) 以上から Z の最小値は

$$\sqrt{\frac{\boxed{(45)}\boxed{(46)}\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}\boxed{(49)}\boxed{(50)}} A}$$

である.

V　つぎの **1**，**2** のうち，いずれか1問を選択し答えなさい．**1** を選択する場合，解答用紙の V−1 をマークし，**2** を選択する場合，V−2 をマークしなさい．

1　数列 a_n $(1 \leqq n)$ に対して新しい数列 b_n $(1 \leqq n)$ をつぎのように定義する．まず $b_1 = 1$ とする．つぎに $n > 1$ に対して

$$a_{n-h} + b_h \quad (1 \leqq h \leqq n/2)$$

のなかで最小のものを b_n とする．さらに新しい数列 c_n $(1 \leqq n)$ をつぎのように定義する．

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (1 \leqq n)$$

さて $a_n = n^2$ のときを考えよう．このとき b_n はつぎのようになる．

$$1,\ 2,\ 5,\ \boxed{(101)}\boxed{(102)},\ 11,\ 14,\ 21,\ 22,\ \boxed{(103)}\boxed{(104)},\ 36,\ 47,\ 50,$$

$$63,\ 70,\ 85,\ 86,\ 103,\ 112,\ 131,\ \boxed{(105)}\boxed{(106)}\boxed{(107)},\ \ldots$$

$c_n = 5$ をみたす n は小さい順に

$$n = \boxed{(108)}\boxed{(109)},\ \boxed{(110)}\boxed{(111)},\ \boxed{(112)}\boxed{(113)},\ 39,\ldots$$

である．

2 素数に関しては，まださまざまな予想が証明されないまま残されている．「4 以上の偶数は 2 つの素数の和として表わされる」というゴールドバッハの予想もその一つである．

つぎのプログラムは 4 から 100 までの偶数が 2 つの素数の和として実際に表わすことができるかを調べるものである．プログラムの空欄に入るもっとも適切な数字を解答欄に答えなさい．

```
10 FOR N = 4 TO 100 STEP 2
11 PRINT N;
12 LET P = N / [(201)]
13 LET Q = P
14 LET F = 0
15 LET R = [(202)]
16 IF R >= P THEN GOTO [(203)][(204)]
17 IF P / R = INT(P / R) THEN GOTO [(205)][(206)]
18 IF R >= Q THEN GOTO 20
19 IF Q / R = INT(Q / R) THEN GOTO [(207)][(208)]
20 LET R = R + [(209)]
21 GOTO [(210)][(211)]
22 LET F = 1
23 PRINT " = "; P; " + "; Q;
24 LET P = P + 1
25 LET Q = Q - 1
26 IF Q >= 2 THEN GOTO [(212)][(213)]
27 IF F = [(214)] THEN GOTO 29
28 PRINT " = 2つの素数の和として表わせない";
29 PRINT
30 NEXT N
31 END
```