[Ⅰ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（1） 不等式

$$\log_2(5-2x)+2\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\leqq 0$$

をみたす x の範囲は $\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（2） 2つの関数

$$f(x)=\left|x^2+3bx-\frac{b}{4}\right|,\quad g(x)=x^2+3b|x|-\frac{b}{4}$$

の最小値が一致するような b の範囲は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（3） $0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき，関数

$$f(x)=\sin(x-\alpha)\cos x\quad\left(\alpha\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

は $x=\boxed{\text{（う）}}$ において最大値をとる。この最大値が $\frac{1}{4}$ となるのは $\alpha=\boxed{\text{（え）}}$ のときである。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

数直線上の点の集合 $S=\{-1,\ 0,\ 1\}$ を考える。球が 2 個用意されており，S の各点上には，2 個まで球を置くことができるとする。S 内に置かれた球に対する次の操作 T を考える。

操作 T

(T1) S 内に球が 1 個だけ置かれている場合は，その球に対して次の操作 A を行う。

操作 A

(A1) 球が点 0 上に置かれている場合はその球を確率 $\dfrac{1}{3}$ で S 内から取り除き，確率 $\dfrac{1}{3}$ ずつで点 -1 または点 1 の上に移す。

(A2) 球が点 -1 または点 1 の上に置かれている場合はその球を必ず点 0 の上に移す。

(T2) S 内に球が 2 個置かれている場合は，どちらか 1 個の球を等しい確率で選び，その選ばれた球に対して操作 A を行う。

いま，球が 2 個とも点 0 上に置かれている状態から始め，操作 T を繰り返し行う。ただし，S 内に球がなくなった場合は操作を行うのをやめる。以下，n，m を自然数とする。

(1) 操作 T を n 回繰り返し終えたとき，球が 2 個とも点 0 上に置かれている確率を p_n とし，点 -1 と点 0 の上に 1 個ずつ置かれているかまたは点 0 と点 1 の上に 1 個ずつ置かれている確率を q_n とする。

(1-1) $n \geqq 2$ に対し，$p_n=\boxed{\text{(あ)}}\,q_{n-1}$ である。

(1-2) $q_1=\boxed{\text{(い)}}$ である。一般に $q_{2m}=0$ であり，q_{2m-1} を m の式で表すと $q_{2m-1}=\boxed{\text{(う)}}$ である。

(2) 操作 T を n 回繰り返し終えたとき，S 内に球が 1 個だけあり，かつそれが点 0 上に置かれている確率を r_n，点 -1 または点 1 の上に置かれている確率を s_n とする。

(2-1) $n \geqq 2$ に対し，

$$r_n=\boxed{\text{(え)}}\,s_{n-1}+\boxed{\text{(お)}}\,p_{n-1}$$
$$s_n=\boxed{\text{(か)}}\,r_{n-1}+\boxed{\text{(き)}}\,q_{n-1}$$

である。

(2-2) 一般に $r_{2m}=0$ であり，r_{2m-1} を m の式で表すと $r_{2m-1}=\boxed{\text{(く)}}$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

p，q を正の実数として，曲線 C を $x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{q}}=1$ $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$ により定義する。

（1） 曲線 C の方程式を y について解いて得られる関数を $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおく。$y=f(x)$ のグラフが $0<x<1$ において変曲点をもつためには p，q が条件 $\boxed{（あ）}$ を満たすことが必要十分である。

（2） 曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を $S(p,\ q)$ とすると，$S(1,\ q)=\boxed{（い）}$ であり，$p>1$ ならば $S(p,\ q)$ と $S(p-1,\ q+1)$ の間には $S(p,\ q)=\boxed{（う）}S(p-1,\ q+1)$ の関係がある。p，q がともに自然数であるときに $S(p,\ q)$ を p，q の式で表すと $S(p,\ q)=\boxed{（え）}$ である。

（3） $p=q=3$ のとき，直線 $l：x+y=\alpha$ が曲線 C と2点を共有するための必要十分条件は $\boxed{（お）}<\alpha\leqq 1$ である。この条件が成り立つとき，直線 l と曲線 C の交点 P，Q の x 座標を x_1，x_2 とすると $x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}=\boxed{（か）}$ かつ $\left(x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}\right)^2=\boxed{（き）}$ である。さらに $\alpha_0=\boxed{（お）}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{\alpha\to\alpha_0+0}\frac{\mathrm{PQ}^2}{\alpha-\alpha_0}=\boxed{（く）}$ が成り立つ。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(1)，(3)に答えなさい。

以下，数列 $\{a_n\}$ が「長さ有限」とは，ある番号から先のすべての n に対して $a_n=0$ となることをいう。ただし，a_n はすべて実数とする。また，数列 $\{a_n\}$ を一つの文字で表すときは $A=\{a_n\}$ あるいは $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots)$ のように書く。数列 $A=\{a_n\}$ が長さ有限のとき，$a_n \neq 0$ となるような自然数 n の最大値を数列 A の「長さ」と呼ぶ。ただし，すべての n に対して $a_n=0$ である数列の長さは 0 とする。

数列 $A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$，および実数 c に対して

$$A+B=\{a_n+b_n\},\quad cA=\{ca_n\}$$

により新しい数列 $A+B$ および cA を定義する。また，A，B がともに長さ有限のときに限って A と B との「内積」$A\cdot B$ および「距離」$\overline{AB}$ をそれぞれ

$$A\cdot B=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\quad \overline{AB}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}$$

により定める。$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{は実際には有限個の数の和である。}\right)$

さて，

$$A(0)=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots),\quad A(1)=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

であるとし，さらに $s=2, 3, \cdots$ に対して長さ s の数列

$$A(s)=(a(s)_1,\ a(s)_2,\ \cdots,\ a(s)_s,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

が定まっていて $a(s)_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ かつ

$$\overline{A(s)A(t)}=1 \quad (s\neq t \text{ かつ } s,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立っているとする。

(1)　$s \geqq 1$ ならば $A(s) \cdot A(s) = 1$ であり，また，$t > s \geqq 1$ ならば $A(s) \cdot A(t) = \dfrac{1}{2}$ であることを示しなさい。ただし，$A(s) = \{a_n\}$，$A(t) = \{b_n\}$ とおきなさい。

(2)　$A(2)$，$A(3)$ を求めると

$$A(2) = \left(\boxed{\text{(あ)}},\ \boxed{\text{(い)}},\ 0,\ 0,\ \cdots\right),$$
$$A(3) = \left(\boxed{\text{(う)}},\ \boxed{\text{(え)}},\ \boxed{\text{(お)}},\ 0,\ 0,\ \cdots\right)$$

である。

(3)　$t > s \geqq 2$ ならば数列 $A(t)$ と数列 $A(s)$ の初めの $s-1$ 項はすべて一致することを示しなさい。ただし，数列 $A(s)$ の初めの s 項を a_1，a_2，$\cdots$，a_s，数列 $A(t)$ の初めの t 項を b_1，b_2，$\cdots$，b_t とおき，また，s と t 以外のすべての $i \geqq 1$ について数列 $A(i)$ の初めの i 項を $c(i)_1$，$c(i)_2$，$\cdots$，$c(i)_i$ とおきなさい。

(4)　$t = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して長さ t の数列 $B(t)$ を

$$B(t) = \frac{1}{t+1}\left\{A(1) + A(2) + \cdots + A(t)\right\} = \frac{1}{t+1}\sum_{i=1}^{t} A(i)$$

により定めると，$s = 1,\ 2,\ \cdots,\ t$ に対して $A(s) \cdot B(t) = \boxed{\text{(か)}}$ である。

(5)　(3)で示されたことから，2つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が定まって，すべての $s \geqq 2$ に対して $A(s)$ は

$$A(s) = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{s-1},\ y_s,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

と表される。$\dfrac{y_s}{x_s}$ を s の式で表すと $\dfrac{y_s}{x_s} = \boxed{\text{(き)}}$ である。また，x_s を s の式で表すと $x_s = \boxed{\text{(く)}}$ となる。