

注 意 問題 1, 2, 3, 4, 5 の解答を, 解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄 (ア) ~ (ネ) については, 当てはまるもの (数, 式など) を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

(1) 3つの行列の積

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の成分が任意の実数 x, y に対し 0 以上となるような実数 a の範囲を不等式で表すと

(ア) となる。

(2) $\angle B$ が直角の直角三角形 ABC の 2 辺 AB, BC の長さをそれぞれ 3, 1 とする。また, $0 < x < 1$ を満たす x に対し線分 BC を $1 : x$ に外分する点を D とする。いま, $\angle CAD = 2\angle BAC$ が成り立つとすると, $x =$ (イ) であり, $\triangle ACD$ の外接円の半径は (ウ) である。

(3) 関数 $f(x), g(x)$ が

$$\begin{cases} f(x) = xe^x + 2x \int_0^2 |g(t)| dt - 1 \\ g(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t) dt \end{cases}$$

を満たすとき, $\int_0^2 |g(t)| dt$ の値は (エ) または (オ) である。求める過程も解答欄 (3) に書きなさい。

2

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ と外接し、 x 軸と接する円で中心の x 座標が正であるものを条件 P を満たす円ということにする。

(1) 条件 P を満たす円の中心は、曲線 $y = \boxed{\text{(カ)}} (x > 0)$ の上にある。また、条件 P を満たす半径 9 の円を C_1 とし、その中心の x 座標を a_1 とすると、 $a_1 = \boxed{\text{(キ)}}$ である。

(2) 条件 P を満たし円 C_1 に外接する円を C_2 とする。また、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、条件 P を満たし、円 C_{n-1} に外接し、かつ円 C_{n-2} と異なる円を C_n とする。円 C_n の中心の x 座標を a_n とするとき、自然数 n に対し a_{n+1} を a_n を用いて表しなさい。求める過程も書きなさい。

(3) (1), (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。求める過程も書きなさい。

3

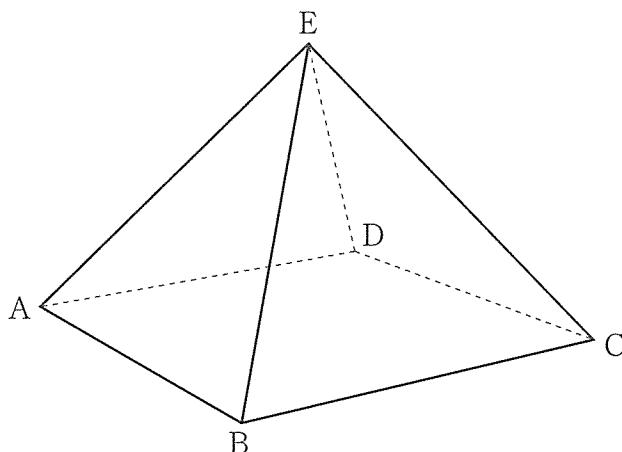
袋の中に文字 \mathbb{K} , \mathbb{E} , \mathbb{I} が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつと、文字 \mathbb{O} が書かれたカードが何枚か入っている。いま、袋の中から 1 枚ずつカードを取り出し、 \mathbb{K} , \mathbb{E} , \mathbb{I} , \mathbb{O} のすべての文字のカードがそれぞれ 1 枚以上出たところで終了する。ただし、一度取り出したカードは袋の中には戻さないものとする。

- (1) 袋の中に文字 \mathbb{O} が書かれたカードが 7 枚あり、合計 10 枚のカードが入っている場合を考える。3 枚目に文字 \mathbb{O} のカードを取り出す確率は $\boxed{\text{(ク)}}$ であり、1 枚目または 3 枚目に文字 \mathbb{O} のカードを取り出す確率は $\boxed{\text{(ケ)}}$ である。また、最後に取り出したカードに書かれている文字が \mathbb{K} である確率は $\boxed{\text{(コ)}}$ である。

- (2) 袋の中に文字 \mathbb{O} が書かれたカードが n 枚 ($n \geq 2$) あり、合計 $n + 3$ 枚のカードが入っている場合を考える。 k 枚目で終了する確率を p_k とすると、 $p_4 = \boxed{\text{(サ)}}$ であり、 $5 \leq k \leq n + 3$ に対しては $p_k = \boxed{\text{(シ)}}$ である。いま、終了した時点で袋の中に残っているカードの枚数の期待値を E_n とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n} = \boxed{\text{(ス)}}$ が成り立つ。

4

ABCDE を 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を底面とし、4 個の正三角形を側面とする正四角錐とする。



- (1) $\triangle CDE$ の重心を G とする。ベクトル \overrightarrow{AG} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} で表すと、 $\overrightarrow{AG} = \boxed{\text{(セ)}}$ となる。

- (2) $\vec{0}$ でないベクトル \vec{p} が平面 α 上の任意のベクトルと垂直なとき、 \vec{p} は平面 α と垂直であるという。 $\vec{p} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$ (a, b, c は実数) が $\triangle CDE$ を含む平面と垂直なとき、 $a:b:c = \boxed{\text{(ソ)}}$ である。よって、 $|\vec{p}| = 1$ かつ $\vec{p} \cdot \overrightarrow{AD} > 0$ となるように a, b, c を定めると、 $\vec{p} = \boxed{\text{(タ)}}$ となる。

- (3) 正四角錐 ABCDE の $\triangle CDE$ に、各辺の長さが 1 の正四面体 CDEF を貼り付ける。ベクトル \overrightarrow{AF} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} で表すと、 $\overrightarrow{AF} = \boxed{\text{(チ)}}$ となる。また、 H を辺 EC の中点とすると、 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HF} = \boxed{\text{(ツ)}}$ であり、 $\triangle AHF$ の面積は $\boxed{\text{(テ)}}$ である。

5

$a > 0$ とし, x の 3 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 5ax^2 + 7a^2x$$

と定める。また, $t \geq 0$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = t$, $x = t + 1$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ で表す。

(1) $S(0) = \boxed{\text{(ト)}}$ である。

(2) $f(x)$ は $x = \boxed{\text{(ナ)}}$ で極小値をとる。曲線 $y = f(x)$ 上にあり, x の値 $\boxed{\text{(ナ)}}$ に対応する点を P とする。 a の値が変化するとき, 点 P の軌跡は曲線 $y = \boxed{\text{(ニ)}} (x > 0)$ である。

(3) $S(t) = S(0)$ を満たす正の実数 t が存在するような a の値の範囲を不等式で表すと $\boxed{\text{(ヌ)}}$ となる。以下, a の値はこの範囲にあるとする。 c を $S(c) = S(0)$ を満たす最大の正の実数とする。区間 $0 \leq t \leq c$ における $S(t)$ の最大値, 最小値をそれぞれ $M(a)$, $m(a)$ とするとき, $M(a) + m(a) = \boxed{\text{(ネ)}}$ となる。