[1] $f(x)$, $g(x)$ を x の整式とする．これらが

$$f(x) = 2x + \int_0^1 g(t)dt$$

$$g(x) = x^2 \int_0^1 f(t)dt + 2$$

を満たすとき，

$$f(x) = \boxed{(1)}\,x + \frac{\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$$

$$g(x) = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}\,x^2 + \boxed{(6)}\,x + \boxed{(7)}$$

となる．さらに，

$$\int_{-1}^{2} \{f(t) + 2g(t)\}dt = \frac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}$$

$$\int_0^2 f(t)g'(t)dt = \boxed{(12)}\boxed{(13)}\boxed{(14)}$$

である．

[2] 三角形 OAB において，辺 OA を $1:4$ に内分する点を D, 辺 OB を $3:1$ に内分する点を E とする．また，2つの線分 AE と BD の交点を P として，直線 OP が辺 AB と交わる点を F とする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される．また三角形 OAF の面積を S_1 とし，三角形 OFB の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$$

である．さらに三角形 POA の面積を S_3 とし，三角形 PFB の面積を S_4 とするとき

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$$

である．

[3] 数列 $\{a_n\}$ は次の３つの条件

$$\text{(A)}\quad a_1 = 1$$
$$\text{(B)}\quad a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 8a_n^2 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\text{(C)}\quad a_{n+1} > 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たしている．以下の文は $\{a_n\}$ の一般項を推測する記述である．

条件 (A) と，条件 (B) において $n = \boxed{(31)}$ とおいた式から，a_2 は２次方程式

$$x^2 - \boxed{(32)}\,x + \boxed{(33)} = 0$$

の解の１つである．この方程式の解のうち小さいほうは $\boxed{(34)}$，大きいほうは $\boxed{(35)}$ である．これらの候補のうち条件 (C) において $n = 1$ とした式を満たすものを選ぶと，$a_2 = \boxed{(36)}$ である．同様に，$a_3 = \boxed{(37)}\boxed{(38)}$，$a_4 = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ となるので，一般項は $a_n = \boxed{(41)}^{\,n-1}$ と推測される．

[4] t を実数の定数として，x の3次関数

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2^t x^2+(4^t-4^{-t})x$$

を考える．$f(x)$ は $x=\alpha$ において極大値を，$x=\beta$ において極小値をとるとする．

(1) α, β を t のなるべく簡単な式で表せ．

(2) α, β が $\alpha\beta=1$ を満たすとき

$$t=\frac{1}{2}\left\{\log_2\left(\boxed{\text{(a)}}+\sqrt{\boxed{\text{(b)}}}\right)-\boxed{\text{(c)}}\right\}$$

である．(a), (b), (c) にあてはまる1桁の自然数を求めよ．

(3) α, β が $\beta-\alpha \geqq 12$ を満たすときの t の値の範囲は

$$t \leqq -\boxed{\text{(d)}}\log_2\boxed{\text{(e)}}-1$$

である．(d), (e) にあてはまる1桁の自然数を求めよ．

[5] 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = n^2 + 10n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与えられている.

(1) $a_n \leqq 100$ を満たすような最大の n と, このときの a_n の値を求めよ.

(2) a_n が 6 桁の整数のうちで最大となるような a_n を求めよ. また, このときの n を求めよ.

[6] 金貨と銀貨が1枚ずつある．これらを同時に1回投げる試行を行ったとき，金貨が裏ならば0点，金貨が表で銀貨が裏ならば1点，金貨が表で銀貨も表ならば2点が与えられるとする．この試行を5回繰り返した後に得られる点数を X とする．

(1) $X=1$ となる確率を求めよ．

(2) $X=3$ となる確率を求めよ．

(3) X が偶数となる確率を求めよ．ただし，0は偶数とする．