

〔 I 〕 以下の間の $\boxed{(1)} \sim \boxed{(33)}$ に当てはまる適切な数値またはマイナス符号(−)をマークしなさい.

(1) x の整式 $f(x)$, $g(x)$ について, 次の 2 つの恒等式が成り立つ.

$$(x+2)f(x^2) = x^2\{f(x) + 7\} - 3x - 6$$

$$g(x) = f(2x)(x^2 + 3) - 4x + 9$$

(i) $f(10)$ の値は $\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ である.

(ii) $g(x)$ を $x + \sqrt{2}$ で割るときの余りは $\boxed{(3)}\boxed{(4)} - \boxed{(5)}\boxed{(6)}\sqrt{\boxed{(7)}}$ である.

(2) $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ であり, $xyz^3 = 1000$, $x^2yz = 10$ が成り立つとき,
 $L = (\log_{10} y)(\log_{10} x + 6)$ とおく.

(i) $L = -40$ のとき, z の値は $10^{\boxed{(8)}\boxed{(9)}}$ または $10^{\boxed{(10)}}$ である.

(ii) L の最大値は $\frac{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$ である.

(3) 直線 ① と 2 つの放物線 ②, ③ がある.

$$y = x + m \quad (m \text{ は定数}) \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

$$y = x^2 + 12x + 20 \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

$$y = -x^2 + 14x - 40 \cdots \cdots \cdots \text{③}$$

① と ② が異なる 2 点で交わり, ① と ③ も異なる 2 点で交わるとき,

(i) m の値の範囲は, $\frac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}} < m < \frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}}$ である.

(ii) ① と ② で囲まれた部分の面積を S_1 とし, ① と ③ で囲まれた部分の面積を S_2 とする.
 S_1 と S_2 が等しいとき,

$$S_1 = S_2 = \frac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}} \text{ である.}$$

- (4) xy 平面上で, 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \leq \sin(x + y) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ を同時に満たす点 (x, y) 全体の集合を領域 D とする.

(i) 領域 D の面積は $\frac{\pi \boxed{(24)}}{\boxed{(25)(26)}}$ である.

(ii) 点 $P(x, y)$ が領域 D の中を動くとき,

$3\sin^2\left(\frac{x}{2} + y\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2} + y\right) + \sqrt{3}\sin(x + 2y) + 2$ の最大値は $\boxed{(27)}$, 最小値は $\boxed{(28)}$ である.

- (5) 数列 $\{a_n\}$ $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ がある.

この数列 $\{a_n\}$ を初めから 1 個, 2 個, 3 個, \dots と下記のように区画に分ける.

$$\frac{1}{8} \mid \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \mid \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \mid \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \mid \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2 \mid \dots$$

このとき, 初めから第 k 番目の区画は, 初項 $\frac{1}{8}$, 公比 2 の等比数列の初項から第 k 項までの数列である. ただし $k = 1, 2, 3, \dots$ とする.

(i) $a_n = 2^{30}$ となる最小の n の値は $\boxed{(29)(30)(31)}$ である.

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の第 135 項は $2^{\boxed{(32)(33)}}$ である.

〔Ⅱ〕 以下の問の $\boxed{\text{(34)}} \sim \boxed{\text{(51)}}$ に当てはまる適切な数値またはマイナス符号(－)をマークしなさい.

xy 平面上に、円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ と、その円上を動く点 $P(x, y)$ がある.

$x + y = t$ とおくと、

(1) t のとりうる値の範囲は、 $\boxed{\text{(34)}} - \boxed{\text{(35)}}\sqrt{\boxed{\text{(36)}}} \leq t \leq \boxed{\text{(37)}} + \boxed{\text{(38)}}\sqrt{\boxed{\text{(39)}}}$ である.

(2) xy を t の式で表すと、 $xy = \frac{\boxed{\text{(40)}}}{\boxed{\text{(41)}}}t^2 - \boxed{\text{(42)}}t - \boxed{\text{(43)}}$ である.

(3) $x^3 + y^3$ のとりうる値の範囲は、

$\boxed{\text{(44)}}\boxed{\text{(45)}} - \boxed{\text{(46)}}\sqrt{\boxed{\text{(47)}}} \leq x^3 + y^3 \leq \boxed{\text{(48)}}\boxed{\text{(49)}} + \boxed{\text{(50)}}\sqrt{\boxed{\text{(51)}}}$ である.

〔Ⅲ〕以下の問の (52) ～ (65) に当てはまる適切な数値またはマイナス符号(－)をマークしなさい.

「3個のさいころを同時に投げる」試行を T とおき、試行 T において、「3個のさいころの目の和が、6, 9, 12 のいずれかである」事象を A とおく. 試行 T を n 回繰り返し行うとき、事象 A が奇数回起こる確率を p_n , 偶数回 (0 回も含む) 起こる確率を q_n とする. ただし、 n は正の整数である.

(1) 試行 T を 1 回行うとき、事象 A が起こる確率は $\frac{(52)}{(53)(54)}$ である.

(2) $p_2 = \frac{(55)(56)}{(57)(58)(59)}$, $q_2 = \frac{(60)(61)}{(62)(63)(64)}$ である.

(3) $p_n > 0.4995$ となる最小の n の値は (65) である.
 ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

〔Ⅳ〕 以下の問の $\boxed{\text{ (66) }}$ ～ $\boxed{\text{ (90) }}$ に当てはまる適切な数値またはマイナス符号(－)をマークしなさい.

点 O を中心とする扇形 OAB があり, $OA = OB = 3$, $\angle AOB = 60^\circ$ である.

線分 OB 上に $OC = 2$ である点 C をとる. 弧 AB 上 (A, B を除く) に点 P をとり, 線分 OP と線分 AC の交点を Q とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく.

$$(1) \quad AQ : QC = 3 : 1 \text{ のとき, } \overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ (66) }}}}{\boxed{\text{ (67) }}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ (68) }} \sqrt{\boxed{\text{ (69) }}}}{\boxed{\text{ (70) }}} \vec{c} \text{ である.}$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{OQ}| \text{ が最小のとき, } \overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{\text{ (71) }}}{\boxed{\text{ (72) }}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ (73) }}}{\boxed{\text{ (74) }}} \vec{c},$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ (75) (76) }}}}{\boxed{\text{ (77) (78) }}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ (79) }} \sqrt{\boxed{\text{ (80) (81) }}}}{\boxed{\text{ (82) }}} \vec{c} \text{ である.}$$

$$(3) \quad \triangle OAP \text{ の面積が } \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ のとき, } |\overrightarrow{OQ}| = \frac{\boxed{\text{ (83) (84) (85) }}}{\boxed{\text{ (86) }}} + \frac{\boxed{\text{ (87) }} \sqrt{\boxed{\text{ (88) (89) }}}}{\boxed{\text{ (90) }}} \text{ である.}$$