

I.

(i)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\log_4 \sin^5 \theta + \log_4 \cos^5 \theta$  の最大値は  $-\frac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}$  である。

(ii)  $\left(\frac{x^3+3}{x}\right)^6$  を展開したとき, 定数項は  $\boxed{(3)} \boxed{(4)} \boxed{(5)} \boxed{(6)}$  である。

(iii) 正四面体のさいころがあり, それぞれの面に数字 2, 3, 5, 7 がひとつずつ書かれている。 $n$  を自然数とし, このさいころを振って  $n$  回目に出た目を  $a_n$  とする。数列  $\{b_n\}$  を

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} \cdot b_n$$

で定義するとき,  $b_n$  の期待値は  $\left(\frac{\boxed{(7)} \boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}\right)^n$  である。また,  $b_m =$

12348 となるとき  $m = \boxed{(10)}$  であり, そのような事象が起こる値の組

$\{b_1, \dots, b_{m-1}\}$  は  $\boxed{(11)} \boxed{(12)} \boxed{(13)}$  通り存在する。

II. 座標空間の原点  $O(0, 0, 0)$  と、球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上の 3 点  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $P(a, b, c)$  を考える。

(i)  $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $BP = \frac{\sqrt{14}}{2}$ ,  $c > 0$  のとき,

$$a = \frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}, \quad b = -\frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}}, \quad c = \frac{\sqrt{\boxed{(18)}}}{\boxed{(19)}}$$

である。また、 $\angle APB = \theta$  とすると,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\boxed{(20)} \boxed{(21)}}}{\boxed{(22)}}$$

であり、 $\triangle APB$  の面積は  $\frac{\sqrt{\boxed{(23)}}}{\boxed{(24)}}$  である。

(ii) 次に、 $a = -\frac{2}{5}$ ,  $b = \frac{4}{5}$ ,  $c = \frac{\sqrt{5}}{5}$  とする。このとき、点  $P$  から直線  $AB$  に下ろした垂線の足  $H$  の座標は

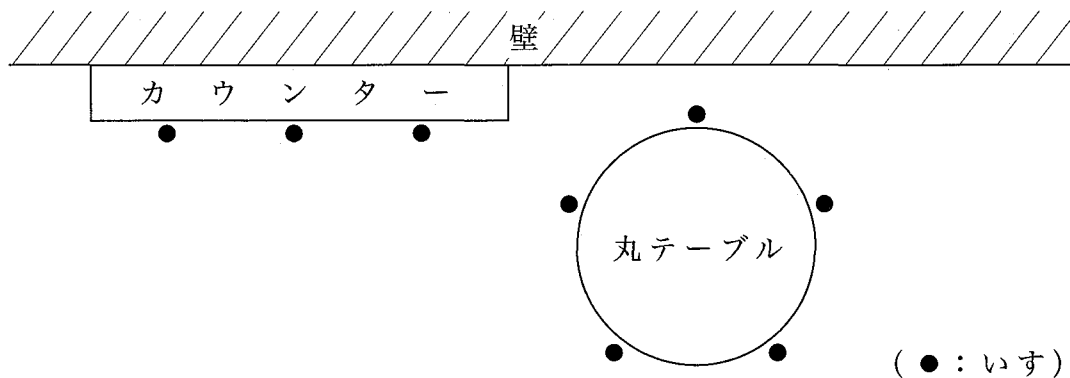
$$\left( -\frac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)} \boxed{(27)}}, \frac{\boxed{(28)} \boxed{(29)}}{\boxed{(30)} \boxed{(31)}}, 0 \right)$$

である。また、直線  $PH$  と球面の交点のうち、 $P$  と異なる方の点の座標は

$$\left( -\frac{\boxed{(32)} \boxed{(33)}}{\boxed{(34)} \boxed{(35)}}, \frac{\boxed{(36)} \boxed{(37)}}{\boxed{(38)} \boxed{(39)}}, \frac{\boxed{(40)} \boxed{(41)} \sqrt{\boxed{(42)}}}{\boxed{(43)} \boxed{(44)}} \right)$$

である。

- III. あなたと友人合わせて8人でレストランに行き、最大5人まで着席できる壁ぎわのカウンター（片側のみ横1列に着席できる長テーブル）ひとつと、最大6人まで円形に着席できる丸テーブルひとつに分かれて着席することにした。ただし、カウンターと丸テーブルそれぞれの最大着席可能人数を超えないように人数を配分し、それぞれのテーブルを着席人数で等分するようにいすを配置するものとする。例えば、カウンターに3人、丸テーブルに5人着席するときのいすの配置は下図のようになる。



- (i) カウンターに着席するグループと、丸テーブルに着席するグループへの分け方について考える。カウンターに着席する人数が2人であるようなグループ分けの方法は (45) (46) 通りある。また、グループ分けの方法は全部で (47) (48) (49) 通りある。
- (ii) 全員の着席位置について考える。ただし丸テーブルについては、回転して重ね合わせることのできる配置は同じものとみなす。カウンターに着席する人数が2人であるような着席位置は (50) (51) (52) (53) 通りある。また、着席位置は全部で (54) (55) (56) (57) (58) 通りあり、このうちあなたがカウンターの一番左のいすに着席するものは (59) (60) (61) (62) 通りある。

IV. 座標平面上の曲線  $y = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{8}{3}$  を  $F$  とする。

- (i) 曲線  $F$  の接線のうちで傾きが最大であるものを  $\ell$  とすると、 $\ell$  の方程式は

$$y = \boxed{(63)}x - \boxed{(64)}$$

である。曲線  $F$  と直線  $\ell$  の接点  $P$  の座標は  $(\boxed{(65)}, \boxed{(66)})$  である。

- (ii) 曲線  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{\boxed{(67)}}{\boxed{(68)}}x - \frac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}}$  を  $G$  とすると、曲線  $G$  の点  $P$  における接線は  $\ell$  である。

- (iii) 曲線  $F$  と  $G$  は点  $P$  以外に共有点  $Q\left(\boxed{(71)}, -\frac{\boxed{(72)}}{\boxed{(73)}}\right)$  をもち、 $F$  と  $G$  で囲まれた部分の面積は  $\frac{\boxed{(74)}}{\boxed{(75)}}$  である。

- (iv) 曲線  $F, G$  の概形および点  $P, Q$  の位置を解答用紙 B の座標平面に描きなさい。ただし、曲線  $F$  は実線で、曲線  $G$  は点線で表すこと。