注　意　問題 A 1，A 2，A 3，A 4，B 1 の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（マ）については，当てはまるもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

A 1

（1）　$a>0$ とする。定積分

$$\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^a dx$$

の値は $\boxed{（ア）}$ である。

（2）　k を実数とする。座標平面上で，点 $(x,\ y)$ を直線 $y=kx$ に関して対称移動した点を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{（イ）} & \boxed{（ウ）} \\ \boxed{（エ）} & \boxed{（オ）} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

（3）　負でない実数 a_1，b_1，c_1 で $a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$ を満たすものが与えられているとき，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定める。a_n，b_n，c_n に対して a_n-b_n，a_n-c_n，b_n-c_n を大きさの順に並べ，大きい順に a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} とする。たとえば $a_1=23$，$b_1=14$，$c_1=2$ とするとき，$a_2=21$，$b_2=12$，$c_2=9$ であり，$a_3=12$，$b_3=\boxed{（カ）}$，$c_3=\boxed{（キ）}$ である。

次に，$a_1=10$ で a_2，b_2，c_2 はどれも 0 ではなく $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ が満たされているとする。このとき $a_n=\boxed{（ク）}$ である。

A 2

k を実数として，x の 4 次関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^4-kx^2+4x+k+3$$

と定める。

(1) 方程式 $f(x)=0$ は，k の値によらず $x=$ $\boxed{(ケ)}$ を実数解としてもつ。また，この方程式の実数解が $\boxed{(ケ)}$ のみとなるのは，$k=$ $\boxed{(コ)}$ のときである。

(2) $k=4$ のとき，$f(x)$ は $x=$ $\boxed{(サ)}$ で最小値 $\boxed{(シ)}$ をとる。

(3) 方程式 $f(x)=0$ が相異なる 4 つの実数解をもつような k の値の範囲は，$k>$ $\boxed{(ス)}$ である。k がこの範囲にあるとき，$f(x)=0$ の 4 つの解を a，b，c，d $(a<b<c<d)$ とする。$a+c+d$ と acd をそれぞれ k を用いて表すと，

$$a+c+d=\boxed{(セ)}, \quad acd=\boxed{(ソ)}$$

となる。また，$k\to\infty$ のとき，$bc\to$ $\boxed{(タ)}$ である。

A 3

実数 θ は

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

の範囲を動くとする。空間内の動点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ -2,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る直線が，xy 平面と交わる点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とする。$x,\ y$ を θ の関数として表すと，

$$x = \boxed{\text{（チ）}},\quad y = \boxed{\text{（ツ）}}$$

となる。これより，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を $x,\ y$ を用いて表すと，

$$\cos\theta = \boxed{\text{（テ）}},\quad \sin\theta = \boxed{\text{（ト）}}$$

となる。したがって，θ が上の範囲を動くとき，点 R の xy 平面上の軌跡の方程式を $y = f(x)$ とすれば，$f(x) = \boxed{\text{（ナ）}}$ となる。

次に，xy 平面内の領域 D を

$$D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ f(x) \leqq y \leqq \frac{5}{4}\right\}$$

と定め，領域 D の面積を求めることを考える。直線 $y = \frac{5}{4}$ を原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心として，$-\frac{\pi}{4}$ 回転した直線の方程式は $y = \boxed{\text{（ニ）}}$ となる。また，曲線 $y = f(x)$ を原点を中心として，$-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線の方程式を $y = g(x)$ $(x > 0)$ とすれば，

$$g(x) = \boxed{\text{（ヌ）}}$$

となる。領域 D を原点を中心として，$-\frac{\pi}{4}$ 回転した領域を D' とすれば，領域 D と領域 D' は合同だから，

$$D \text{ の面積} = D' \text{ の面積} = \boxed{\text{（ネ）}}$$

である。

A 4

1辺の長さが1の正五角形の5つの頂点に反時計回りにA，B，C，D，Eと名前をつける。いま，初めに頂点Aに白玉を1個，頂点Cに赤玉を1個置き次の操作を繰り返し行う。

> 操作
>
> コイン1枚とさいころ1個を同時に投げる。コインの表が出たら白玉を，裏が出たら赤玉を選んでさいころの出た目の数の長さだけ正五角形の辺上を反時計回りに動かす。また，玉が到達した頂点に別の色の玉がある場合は，玉を動かす前にあった2つの玉の位置を入れ替えるものとする。

たとえば1回目にコインの表とさいころの6の目が出たとすると白玉がA→B→C→D→E→A→Bと動き，白玉の位置が頂点Bとなる。続いて2回目にコインの裏とさいころの4の目が出たとすると赤玉がC→D→E→A→Bと動き，到達した頂点Bに白玉があるので，赤玉を頂点Bに置き，頂点Bにあった白玉を頂点Cに移す。

以下，2つの玉が正五角形の隣り合う2頂点にある状態を「状態(S)」と呼ぶことにする。

（1） 2回目の操作を終えたとき頂点Dと頂点Eに玉がある確率は $\boxed{\text{（ノ）}}$ である。

（2） n 回目の操作を終えたとき状態(S)となる確率を p_n とする。$p_1 = \boxed{\text{（ハ）}}$ である。また p_{n+1} と p_n の間には $p_{n+1} = \boxed{\text{（ヒ）}}$ という関係式が成り立つ。これより p_n を n を用いて表すと $p_n = \boxed{\text{（フ）}}$ となる。

（3） n 回目の操作を終えたとき初めて状態(S)となる確率を q_n とする。q_n を n を用いて表すと $q_n = \boxed{\text{（へ）}}$ である。

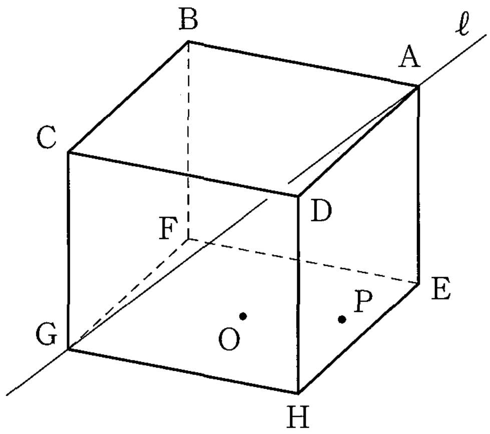
いま，状態(S)となるまで操作を繰り返し，状態(S)となった時点で操作を終了する。ただし，操作を r 回行っても状態(S)とならない場合は r 回で操作を終了することとする。このとき，操作を行う回数の期待値を r を用いて表すと $\boxed{\text{（ホ）}}$ となる。

B 1

座標空間で次の 8 つの点

$$A(-1,\ 1,\ 2),\ B(-1,\ -1,\ 2),\ C(1,\ -1,\ 2),\ D(1,\ 1,\ 2)$$
$$E(-1,\ 1,\ 0),\ F(-1,\ -1,\ 0),\ G(1,\ -1,\ 0),\ H(1,\ 1,\ 0)$$

を頂点とする 1 辺の長さ 2 の立方体 ABCD−EFGH を考える。いま，点 P$(x,\ y,\ 0)$を正方形 EFGH 内の点(辺上も含む，ただし P$\neq$G)とし，点 A と点 G を通る直線を ℓ とする。



（1） 点 Q を直線 ℓ 上の点で $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AG}$（$t$ は実数）を満たすものとする。$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{AG}$ が直交するとき t を x と y で表すと $t=$ $\boxed{\quad（マ）\quad}$ となる。

（2） 点 P から直線 ℓ に下ろした垂線の足は点 A と点 G の間にあることを証明しなさい。

（3） 点 P が原点 O$(0,\ 0,\ 0)$を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を動くとし，P の座標を$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と書くことにする。このとき，三角形 APG の面積の最大値と最小値，およびそれらを与える θ の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。