

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

- (1) n は 3 以上の奇数として、多項式 $P(x) = x^n - ax^2 - bx + 2$ を考える。 $P(x)$ が $x^2 - 4$ で割り切れるときは $a = \boxed{\text{あ}}$, $b = \boxed{\text{い}}$ であり、 $(x+1)^2$ で割り切れるときは $a = \boxed{\text{う}}$, $b = \boxed{\text{え}}$ である。

- (2) 3 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

の間に $A = BC$ の関係があるとき、 $x = \boxed{\text{お}}$, $u = \boxed{\text{か}}$, $v = \boxed{\text{き}}$, $\theta = \boxed{\text{く}}$ である。ただし $0 < \theta < \pi$ とする。

- (3) 方程式 $2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 11 = 0$ が表す曲線は、頂点が $(\boxed{\text{け}}, \boxed{\text{こ}})$ と $(\boxed{\text{さ}}, \boxed{\text{し}})$, 焦点が $(\boxed{\text{す}}, \boxed{\text{せ}})$ と $(\boxed{\text{そ}}, \boxed{\text{た}})$ の双曲線で、その漸近線の方程式は $y = \boxed{\text{ち}}$ および $y = \boxed{\text{つ}}$ である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また、設問(6)に答えなさい。

n を 3 以上の自然数, r を 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。ここで次の操作を r 回繰り返し行う。

操作

袋の中から玉 1 個を等確率で取り出し, その番号を記録した上で袋に戻す。

集合 $U = \{1, 2, \dots, n\}$ を全体集合とし, U の部分集合

$$A = \{x \mid x \text{ は } r \text{ 回の操作のいずれかで記録された番号}\}$$

を考える。

(1) $A \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$ となる確率は (あ) である。

(2) $A \subset \{1, 2\}$ または $A \subset \{1, 3\}$ となる確率は (い) である。

(3) 集合 A の要素の個数が 2 となる確率は (う) である。

(4) $\bar{A} \subset \{1, 2, \dots, n-2\}$ となる確率は (え) である。ここで \bar{A} は U を全体集合としたときの A の補集合を表す。

(5) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, 集合 A の要素の最大値が k となる確率を p_k とすると $p_k =$ (お) である。

(6) 集合 $B = \{2^x \mid x \in A\}$ を考える。 $r = 2$ のとき, 集合 B の要素の最大値の期待値 E を求めなさい。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

平面内に同一直線上にない3点 A , B , C をとり, $AB=3$, $BC=1$, $AC=t$ とする。
また直線 AC に関して B の反対側に点 D をとり, $CD=2$ とする。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径は であり, $t =$ のとき は
最小となる。また, 四角形 $ABCD$ が円に内接するとき, $AD =$ である。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径は である。

(3) 四角形 $ABCD$ の各辺がひとつの共通の円に接しているとき $AD =$ で
あり, その円の半径は である。 $t =$ のとき は最大と
なる。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また、設問(3)に答えなさい。

関数 $y = \frac{1}{x}$ および $y = \frac{k}{x}$ (ただし $k > 1$) のグラフの $x > 0$ に対する部分をそれぞれ曲線 C_1 , C_2 とする。曲線 C_2 上の点 $P\left(a, \frac{k}{a}\right)$ を通って負の傾き m をもつ直線 l が曲線 C_1 と交わる2点のうち、 x 座標の小さいほうを $A(x_1, y_1)$, x 座標の大きいほうを $B(x_2, y_2)$ とする。また直線 l と曲線 C_1 で囲まれる領域の面積を S とする。

(1) $AB = \sqrt{\text{ (あ) }}$ である。また $m < 0$ を固定し、 a を正の実数全体にわたって動かすとき、 $a = \text{ (い) }$ において AB は最小値をとる。

(2) $a > 0$ を固定するとき、 $AP = PB$ が成り立つような m の値は (う) である。

(3) $a > 0$ を固定し、 m を負の実数全体にわたって動かすとき、 x_1 , x_2 , S を m の関数と考えてそれぞれ $x_1(m)$, $x_2(m)$, $S(m)$ と書く。 $S(m)$ の導関数 $\frac{d}{dm} S(m)$ を $x_1(m)$, $x_2(m)$ を用いた式で表しなさい。また $S(m)$ は $m = \text{ (う) }$ において最小値をとることを示しなさい。

(4) $m = \text{ (う) }$ に対する $S(m)$ の値を S_0 とすると $S_0 = \text{ (え) }$ である。したがって S_0 は a の値にはよらず、 k だけで定まる。