

I.

- (i) 放物線 $y = -2x^2 + 4x - 4$ を x 軸に関して対称移動し、さらに x 軸の方向に 8, y 軸の方向に 4 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$$y = \boxed{(1)} x^2 - \boxed{(2)} \boxed{(3)} x + \boxed{(4)} \boxed{(5)} \boxed{(6)}$$

である。

- (ii) ある自然数があり、それを 9 で割ると 5 余り, 7 で割ると 4 余り, 63 で割ると r 余る。このとき, $r = \boxed{(7)} \boxed{(8)}$ である。

- (iii) 座標平面上で 3 点 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ を頂点とする三角形を考える。点 (x, y) がこの三角形の辺上を動くとき, $\sin x \cos y + \cos(x + y)$ は

$$(x, y) = \left(\frac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}} \pi, \boxed{(11)} \right)$$

のとき最大値 $\sqrt{\boxed{(12)}}$ をとり,

$$(x, y) = \left(\frac{\boxed{(13)}}{\boxed{(14)}} \pi, \frac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}} \pi \right)$$

のとき最小値 $-\frac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$ をとる。

II. 平面上の $\triangle OAB$ とその内部の点 P について,

$$|\overrightarrow{OA}| = 6, \quad |\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{OP}| = \frac{3\sqrt{13}}{4},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{27}{2}$$

が成り立っている。

(i) $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}} \overrightarrow{OB}$ である。

(ii) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{(23)} \cdot \boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}$ である。

(iii) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とすると, $\overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}} \overrightarrow{OP}$ である。

(iv) $\triangle APB$ の面積は $\frac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である。

III. 関数 $f(x) = \int_0^x |t-2| dt$ を考える。

(i) $x \leq 2$ の範囲では

$$f(x) = -\frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}} x^2 + \boxed{(32)} x$$

であり、それ以外の範囲では

$$f(x) = \frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}} x^2 - \boxed{(35)} x + \boxed{(36)}$$

である。

(ii) $f(x) = 10$ となる x の値は $x = \boxed{(37)}$ である。

(iii) 関数 $g(x) = (x-1)f(x)$ は、 $x = \frac{\boxed{(38)} - \sqrt{\boxed{(39)} \boxed{(40)}}}{\boxed{(41)}}$ で最小値をとる。

IV. 座標平面上に、底面に塗料のついた半径 1 の円板を置く。この塗料によって、円板が接触した平面上の領域には色がつくものとする。この円板を以下の手順に従って平面上で動かす。

まず、上 (y 軸の正の向き)、下 (y 軸の負の向き)、左 (x 軸の負の向き)、右 (x 軸の正の向き) のいずれかの向きを選択し、その向きに円板を 1 だけ動かす。この時点で色がついている領域の面積を X_1 とする。

その状態から、再び上下左右のいずれかの向きを選択し、その向きに円板を 1 だけ動かす。この時点で色がついている領域の面積を X_2 とする。

(i) X_1 の値は $\boxed{(42)}\pi + \boxed{(43)}$ である。

(ii) 1 回目、2 回目それぞれの移動の際に、上、下、左、右を選択する確率がいずれも $\frac{1}{4}$ であるとき、 X_2 の期待値は $\frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}}\pi + \boxed{(46)}$ である。

(iii) $0 \leq p \leq 1$ とする。1 回目、2 回目それぞれの移動の際に、上、下、左、右を選択する確率がそれぞれ $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{2}$, $\frac{1-p}{2}$, $\frac{1-p}{2}$ であるとき、 X_2 の期待値を p を用いて表すと

$$-\frac{\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}}\pi p^2 + \frac{\boxed{(49)}}{\boxed{(50)}}\pi p + \boxed{(51)}\pi + \boxed{(52)}$$

である。この期待値は $p = \frac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}}$ のとき最大値

$$\frac{\boxed{(55)}}{\boxed{(56)}}\pi + \boxed{(57)}$$

をとり、 $p = \boxed{(58)}$ または $p = \boxed{(59)}$ のとき最小値

$$\boxed{(60)}\pi + \boxed{(61)}$$

をとる。

V. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{4}{12 - 9a_n} \end{cases}$$

以下の設問に答えなさい。

[解答用紙 B の解答欄の枠内に答えのみ記入すること。]

- (i) $b_n = \frac{1}{6a_n - 4}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ が定まる。 b_{n+1} を b_n を用いて表しなさい。
- (ii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。