I. 以下の問いに答えよ。

(i) a, b を $(a+bi)^3 = 4+i$ を満たす実数とする。ただし，i は $i^2=-1$ を満たす数である。このとき

$$\frac{(a-bi)^3}{2+3i} = \frac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)\,\vdots\,(3)}} - \frac{\boxed{(4)\,\vdots\,(5)}}{\boxed{(6)\,\vdots\,(7)}}\,i$$

である。

(ii) $-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で

$$f(\theta) = \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\cos 2\theta + \left(4-3\sqrt{3}\right)\sin\theta - 2\cos\theta\sin 2\theta - \frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{3}\right)$$

は，$\theta = \boxed{(8)\,\vdots\,(9)}^\circ$ のとき，最小値

$$-\frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}} - \frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}\sqrt{\boxed{(14)}}$$

をとる。

(iii) 2 と 3 と 5 のうちの少なくともひとつで割り切れる自然数 35 個からなる集合について考える。この集合には 2 の倍数は 20 個，3 の倍数は 13 個，5 の倍数は 11 個ある。30 の倍数はなく，15 の倍数は 2 個ある。6 の倍数の個数は，10 と 15 のうちの少なくとも一方で割り切れる要素の個数の $\frac{1}{2}$ である。このとき 6 の倍数は $\boxed{(15)}$ 個あり，10 の倍数は $\boxed{(16)}$ 個ある。

II. $f(x)=5x+2$, $g(x)=2x+3$ とし，直線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}_n(a_n, f(a_n))$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と，直線 $y=g(x)$ 上の点 P_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を次のようにして定める。まず，$a_1=\dfrac{5}{3}$ によって A_1 を定める。次に，A_n があたえられたとき，A_n から x 軸に下ろした垂線と，直線 $y=g(x)$ の交点を P_n とし，P_n から y 軸に下ろした垂線と，直線 $y=f(x)$ の交点を A_{n+1} とする。

また，直線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{B}_n(b_n, f(b_n))$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と，直線 $y=g(x)$ 上の点 Q_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を，$b_1=\dfrac{4}{3}$ から始めて，上と同様にして定める。つまり，$b_1=\dfrac{4}{3}$ によって B_1 を定める。B_n があたえられたとき，B_n から x 軸に下ろした垂線と，直線 $y=g(x)$ の交点を Q_n とし，Q_n から y 軸に下ろした垂線と，直線 $y=f(x)$ の交点を B_{n+1} とする。

(i) このとき

$$a_n=\frac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}\left(\frac{\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}}\right)^{n-1}+\frac{\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}}$$

であり，

$$b_n=\left(\frac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}}\right)^{n-1}+\frac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}}$$

である。

(ii) 四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n$ の面積は

$$\frac{\boxed{(27)}}{\boxed{(28)\,\vdots\,(29)}}\left(\frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)\,\vdots\,(32)}}\right)^{n-1}$$

である。

III. 放物線 $y=-x^2+\dfrac{9}{4}$ を C とし，直線 $y=\sqrt{3}(x-k)$ を l とする。ただし，k は定数である。放物線 C と直線 l は点 P で接しているとする。また，直線 l と x 軸の交点を Q とし，放物線 C と x 軸との 2 つの交点のうち x 座標の小さい方を R とする。

(i) このとき P の座標は

$$\left(-\frac{\sqrt{\boxed{(33)}}}{\boxed{(34)}},\ \frac{\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}}\right)$$

であり，$k=-\sqrt{\boxed{(37)}}$ である。

(ii) 線分 PQ，線分 QR，および放物線 C で囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{(38)}\,\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}}\sqrt{\boxed{(41)}}-\frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}$$

である。

(iii) 点 Q を通り，$\angle$PQR を 2 等分する直線を m とする。放物線 C と直線 m によって囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{(44)}\,\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\,\boxed{(47)}}\sqrt{\boxed{(48)}}$$

である。

IV. 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(3,0,0)$, $\mathrm{B}(3,\sqrt{3},3)$ について考える。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とおく。$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{(49)}\,\vdots\,\boxed{(50)}}}{\boxed{(51)}}$ である。

(ii) 線分 OB 上の点で, $\angle\mathrm{OAQ} = 60^\circ$ を満たす点を Q とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\boxed{(52)}}{\boxed{(53)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

(iii) r を正の実数とし, 点 R を次を満たす点とする。

1. $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = r$,
2. $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角は 30°,
3. $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $2\sqrt{3}\,r$ である。

このとき, 点 R の座標を r を用いて表せ。ただし, 解は 2 つある（結果のみを, 解答用紙 B の所定の解答欄に記入すること）。