

注 意 問題 A 1, A 2, A 3, A 4, B 1 の解答を, 解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
空欄 (ア) ~ (ホ) については, 当てはまるもの (数, 式など) を解答用紙の
所定の欄に記入しなさい。

A 1

- (1) 平面上において点 O を中心とする半径 r の円を考える。この円の外部にある点 A からこの円に引いた 2 本の接線のなす角度が $\frac{\pi}{6}$ であるとき, $\frac{r}{OA}$ の値は (ア) である。
- (2) xy 平面上で放物線 $C: y = x\left(\frac{5}{2} - x\right)$ と直線 $l: x - 2y = 0$ が囲む図形の面積は (イ) である。放物線 C と直線 l との 2 つの交点を A, B とする。点 P が放物線 C 上を A から B まで動くとき, 三角形 APB の面積が最大となるのは点 P が $P_0\left(\text{(ウ), (エ)}\right)$ のときである。点 P_0 から直線 l におろした垂線を P_0H とすると, H の座標は $\left(\text{(オ), (カ)}\right)$ である。
- (3) xy 平面上において曲線 $y = e^x$ および 3 つの直線 $x = 0, x = 1, y = 0$ により囲まれる図形を K とする。図形 K を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積は (キ) であり, 図形 K を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積は (ク) である。

A 2

さいころを投げるといふ試行を繰り返す。ただし、2回連続して5以上の目が出た場合は、それ以降の試行は行わないものとする。

n 回目の試行が行われ、かつ n 回目に出た目が4以下になる確率を p_n とする。このとき、 $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \boxed{\text{(ケ)}}$, $p_3 = \boxed{\text{(コ)}}$ である。また $p_0 = 1$ とおく。 $n \geq 0$ に対して、 p_n , p_{n+1} , p_{n+2} の間に成立する関係式を求め、それを $p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$ ($\alpha > \beta$) の形に書くと $\alpha = \boxed{\text{(サ)}}$ である。よって、 $p_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\boxed{\text{(シ)}} \right)$ となる。

また、 n 回目の試行が行われ、かつ n 回目に出た目が5以上になる確率を q_n とする。このとき $q_1 = \frac{1}{3}$ である。 $n \geq 2$ とするとき、 q_n と p_{n-1} , p_{n-2} の間には $q_n = \boxed{\text{(ス)}}$ なる関係式が成り立つ。したがって、5以上の目が出る回数の期待値は $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \boxed{\text{(セ)}}$ である。

A 3

$a > 1$ とする。 xy 平面上において点 (a, a) を中心とする半径 r の円 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ を考える。この円が曲線 $C: xy = 1 \ (x > 0)$ に接するのは、半径 r がどのような値のときであるかを調べてみよう。この半径 r の円が曲線 C と接するとき、その接点の x 座標は、曲線

$$y = f(x) = (x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2$$

と直線 $y = r^2$ が接する場合の接点の x 座標と一致する。

$1 < a \leq$ のとき、 $y = f(x)$ は $x > 0$ において $x = \alpha_0 =$ でのみ極小となる。よって、 x 座標が α_0 なる点において半径 $r =$ の円だけが曲線 C に接する。

$a >$ のとき、 $y = f(x)$ は $x > 0$ において $x = \alpha_0$ で極大となり、 $x = \alpha_1 =$, $x = \alpha_2 =$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) において極小となる。したがって、 x 座標が α_0 なる点で曲線 C に接する円のほかに、半径 $r =$ の円が x 座標が α_1, α_2 なる 2 点において曲線 C に接する。

A 4

$a > 0$ とする。このとき、3 次方程式

$$\frac{1}{2}(x^3 + 3x) = a$$

はただ一つの実数解 $x(a) > 0$ をもつ。正の数 R に対し、 $0 < a \leq R$ の範囲で a を動かすとき、対応する実数解 $x(a)$ が整数となるような a の個数を $N(R)$ とする。

$N(R) = 1$ となるような R の範囲は $\boxed{\text{(ナ)}} \leq R < \boxed{\text{(ニ)}}$ である。

$x = u - \frac{1}{u}$ とおき、 $\frac{1}{2}(x^3 + 3x)$ を u で表すと $\boxed{\text{(ヌ)}}$ となる。したがって、 $x(a)$ を a を使って表せば

$$x(a) = \sqrt[3]{\boxed{\text{(ネ)}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\boxed{\text{(ネ)}}}} \quad \left(\boxed{\text{(ネ)}} > 0 \right)$$

となる。

$L = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-C} N(R)$ が有限な正の値となるのは $C = \boxed{\text{(ノ)}}$ のときであり、そのとき $L = \boxed{\text{(ハ)}}$ である。

B 1

xy 平面上において円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l: 2x - y = 0$ を考える。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって、円 C はどのような図形に移るか。理由をつけて答えなさい。

(2) 円 C と直線 l との交点の座標は $(\boxed{\text{(ヒ)}}, \boxed{\text{(フ)}}), (\boxed{\text{(ヘ)}}, \boxed{\text{(ホ)}})$ である。

(3) 円 C を円 C に移し、直線 l を直線 l に移す 1 次変換を表す行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をすべて求めなさい。求める過程も示すこと。