

I. 以下の問いに答えよ。

- (i) ある年におけるある業種の企業の法人申告所得額を調べた。申告所得額が x 万円以上である企業数の全体に対する割合を $y\%$ とし、

$$X = \log_{10} x, \quad Y = \log_{10} y$$

と定める。 X と Y の関係を調査結果をもとに調べたところ、 $4 \leq X \leq 8$ の範囲では、 Y は X の 1 次関数で、

$$X = 4 \text{ のとき } Y = 2, \quad X = 8 \text{ のとき } Y = -2$$

と考えてよいことがわかった。このことに基づいて計算すると、申告所得額が $\boxed{(1)} \cdot \boxed{(2)}$ 億 $\boxed{(3)}$ 千万円以上である企業の割合は 8% と考えられる。

- (ii) 2 つの 2 次関数 $f(x) = 2x^2 - 2x$, $g(x) = -x^2 + x$ を考える。 $y = f(x)$ のグラフを F , $y = g(x)$ のグラフを G とし、 $0 < t < 1$ を満たす t に対する G 上の点を $P(t, g(t))$ とする。また、原点を O とし、直線 OP とグラフ F の O 以外の交点を Q とする。線分 OP とグラフ G で囲まれた図形の面積を S_1 とし、線分 PQ と 2 つのグラフ F , G で囲まれた図形の面積を S_2 とすると、

$$S_1 = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}} t^3, \quad S_2 = \frac{\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}} \left(t^3 + \boxed{(8)} t^2 - \boxed{(9)} t + \boxed{(10)} \right)$$

である。また、 $S_1 + S_2$ が $0 < t < 1$ の範囲で最小となるのは、

$$t = \frac{-\boxed{(11)} + \boxed{(12)} \sqrt{\boxed{(13)}}}{\boxed{(14)}}$$

のときである。

II. 空間において、原点 O を中心とする半径 5 の球面上に、 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| = 4$ かつ $|\overrightarrow{QR}| = 3$ を満たすように 3 点 P, Q, R をとる。また、線分 QR の中点を M とする。

(i) \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OM} の内積は $\boxed{(15)} \cdot \boxed{(16)}$ である。

(ii) \overrightarrow{OM} の大きさは $\frac{\sqrt{\boxed{(17)} \cdot \boxed{(18)}}}{\boxed{(19)}}$ である。

(iii) \overrightarrow{MP} と \overrightarrow{OM} の内積は $-\frac{\boxed{(20)} \cdot \boxed{(21)}}{\boxed{(22)}}$ である。

(iv) 点 P と点 M を通る直線を ℓ とし、原点 O から ℓ に下ろした垂線の足を H とする。このとき、 \overrightarrow{OH} を \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OM} で表すと、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{(23)} \cdot \boxed{(24)} \overrightarrow{OP} + \boxed{(25)} \cdot \boxed{(26)} \overrightarrow{OM}}{\boxed{(27)} \cdot \boxed{(28)}}$$

である。

III. $\{a_n\}$ を初項 a_1 が 7 で公差が 3 の等差数列とし, $\{b_n\}$ を初項 b_1 が 1 で公差が 5 の等差数列とする。 A を数列 $\{a_n\}$ の項として現れるすべての数の集合, B を数列 $\{b_n\}$ の項として現れるすべての数の集合とし, $C = A \cup B$ とする。 $\{c_n\}$ を C の要素を重複を許さずに小さい順にならべて得られる数列として, 以下の問いに答えよ。

(i) 数列 $\{c_n\}$ の第 7 項 c_7 は $\boxed{(29) \mid (30)}$ で, 第 11 項 c_{11} は $\boxed{(31) \mid (32)}$ である。

(ii) $\sum_{k=1}^7 c_k = \boxed{(33) \mid (34)}$ で, $\sum_{k=1}^{14} c_k = \boxed{(35) \mid (36) \mid (37)}$ である。

一般に, m を正の整数としたとき,

$$\sum_{k=1}^{7m} c_k = \frac{\boxed{(38) \mid (39) \mid (40)}}{\boxed{(41)}} m^2 + \frac{\boxed{(42) \mid (43)}}{\boxed{(44)}} m - \boxed{(45)}$$

である。

(iii) 数列 $\{d_n\}$ を, $d_n = \sum_{k=1}^n (c_{2k} - c_{2k-1})$ と定める。このとき, 数列 $\{d_n\}$ の第 77 項 d_{77} は $\boxed{(46) \mid (47) \mid (48)}$ で, 第 80 項 d_{80} は $\boxed{(49) \mid (50) \mid (51)}$ である。

IV. A, Bの2種類の装置を用いて提供される新しいサービスについて考える。サービスの利用者は、装置A, Bのどちらか一方を保有する。また、1人が保有できる装置は1台のみとする。1回のサービスは、2人の装置保有者に対して同時に提供される（サービスの提供に関する具体的な定めは、下記の問いで与えられる）。またこのとき、2人ともサービスを1回利用したことになり、費用として3円ずつ課される。ただし、サービスを利用した2人が保有する装置が、一方がAでもう一方がBだった場合は、双方に対して追加費用2円が発生し、課される費用は5円ずつになる。装置Aを保有している人は m 人、装置Bを保有している人は n 人（ただし、 $m \geq 0$, $n \geq 0$, $m+n > 1$ と仮定する）として、以下の問いに答えよ。

- (i) この問いにおいては、特に $m \geq 1$ の場合を考える。ある時点においてサービスが提供される2人は、装置Aのある特定の保有者Fさんと、Fさん以外のもう1人とする。ここで、もう1人は、装置AまたはBの全ての保有者の集合からFさんを除き、その中から、サービスセンターにおいて偶然によって定まり、どの保有者が選ばれるかは全て同様に確からしいとする。このサービスが1回提供されたときにFさんに課される費用の期待値は、

$$\boxed{(52)} + \frac{\boxed{(53)} n}{m+n-\boxed{(54)}} \text{ 円}$$

である。

- (ii) この問いにおいては、 $m \geq 0$ の一般的な場合を考える。ある時点においてサービスを提供される2人は、装置AまたはBの全ての保有者の中から、サービスセンターにおいて偶然によって定まり、どの2人が選ばれるかは全て同様に確からしいとする。このサービスが1回提供されたときにサービスを利用した2人に課される費用の和の期待値を E とする。 $N = m+n$, $p = \frac{m}{N}$ として、 E を N と p を用いて表すと、

$$E = \boxed{(55)} + \frac{\boxed{(56)} N}{N - \boxed{(57)}} p (\boxed{(58)} - p) \text{ (円)}$$

となる。最後に、 N は一定としたときに、 E が最小値をとるのはどのような場合かを記せ（最小値も記すこと）。

(ア)