**注　意**　問題**A 1**，**A 2**，**A 3**，**A 4**，**B 1**の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ミ）については，当てはまるもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

# A 1

（1）　$0<a<1$ とする。$xy$ 平面上で

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 1$$

により定められる部分 $A$ の面積は $\boxed{\text{（ア）}}$ である。また空間内で $x$ 軸のまわりに $A$ を1回転させてできる回転体の体積は $\boxed{\text{（イ）}}$ である。この体積は $a=\boxed{\text{（ウ）}}$ のときに最大となる。

（2）　$t$ を実数とする。空間内の2点 $\mathrm{P}\,(t,\ \cos t,\ -1)$，$\mathrm{Q}\,(t,\ 0,\ 1+\sin t)$ を通る直線と $xy$ 平面との交点は $\mathrm{R}\,(t,\ \boxed{\text{（エ）}},\ 0)$ である。$t$ が $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くときに点Rが描く曲線を $C$ とする。$xy$ 平面上で，$x$ 軸，$y$ 軸と $C$ とにより囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{（オ）}}$ である。

## A 2

（1） さいころを続けて $n$ 回投げるとき，6 の約数の目が奇数回出る確率を $p(n)$ とする。たとえば，$p(1)=\dfrac{2}{3}$，$p(2)=\boxed{\text{（カ）}}$ である。$n \geqq 2$ のとき $p(n)$ と $p(n-1)$ の間には $p(n)=\boxed{\text{（キ）}}$ という関係式が成り立つ。これより $n$ を用いて $p(n)$ をあらわすと $p(n)=\dfrac{\boxed{\text{（ク）}}}{2}$ である。

（2） さいころを続けて 100 回投げるとき，1 の目がちょうど $k$ 回 $(0 \leqq k \leqq 100)$ 出る確率は ${}_{100}\mathrm{C}_k \times \dfrac{\boxed{\text{（ケ）}}}{6^{100}}$ であり，この確率が最大になるのは $k=\boxed{\text{（コ）}}$ のときである。

次に，さいころを続けて $n$ 回投げるとき，1 の目がちょうど $k$ 回 $(0 \leqq k \leqq n)$ 出る確率を考える。$n$ を固定したとき，この確率を最大にするような $k$ の値が 2 個存在するための必要十分条件は，$n$ を $\boxed{\text{（サ）}}$ で割ったときの余りが $\boxed{\text{（シ）}}$ となることである。

# A 3

（1） 実数 $a$ を固定したとき，直線 $y=ax+b$ と曲線 $y=x^2-2$ が共有点を持つための切片 $b$ の条件を $a$ を用いてあらわすと $b \geqq$ $\boxed{\text{（ス）}}$ である。

（2） 実数 $a$ を固定したとき，直線 $y=ax+b$ と曲線 $y=|x^2-2|$ が共有点を持つための切片 $b$ の条件は，$|a| \geqq$ $\boxed{\text{（セ）}}$ のとき $b \geqq$ $\boxed{\text{（ス）}}$ であり，$|a| <$ $\boxed{\text{（セ）}}$ のとき $b \geqq$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ となる。

このように，$a$ を固定したとき，直線 $y=ax+b$ と曲線 $y=f(x)$ が共有点を持つような $b$ の最小値が存在することがある。この最小値の符号を換えたものを $f^*(a)$ と書くことにする。たとえば $f(x)=x^2-2$ ならば $f^*(a)=-\left(\boxed{\text{（ス）}}\right)$ である。

（3） $f(x)=|x^2-2|$ とする。$g(a)=f^*(a)$ と定めて，$a$ を変数 $x$ で書き換えた関数 $g(x)$ に対して $g^*(a)$ を考える。$|a| \geqq$ $\boxed{\text{（タ）}}$ のとき $g^*(a)=$ $\boxed{\text{（チ）}}$ であり，$|a| <$ $\boxed{\text{（タ）}}$ のとき $g^*(a)=$ $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

# A 4

（1） $t$ を実数とする。座標平面内の2点 $(0,\ 1)$，$(t,\ 0)$ を結ぶ線分の垂直2等分線 $\ell_t$ の傾きは $\boxed{\text{（テ）}}$ で，方程式は $y=\boxed{\text{（テ）}}x+\boxed{\text{（ト）}}$ である。

直線 $\ell_t$ に関して点 $(1,\ 1)$ と対称な位置にある点を $\mathrm{P}(t)$ とする。座標であらわすと，$\mathrm{P}(-1)$ は $(-1,\ -1)$，$\mathrm{P}(0)$ は $\boxed{\text{（ナ）}}$，$\mathrm{P}(1)$ は $\boxed{\text{（ニ）}}$ である。また $\mathrm{P}(t)$ の座標を $t$ を用いてあらわすと $\left(t-1+\dfrac{\boxed{\text{（ヌ）}}}{1+t^2},\ \dfrac{\boxed{\text{（ネ）}}}{1+t^2}\right)$ である。$|t|\to\infty$ のとき $\mathrm{P}(t)$ は直線 $y=\boxed{\text{（ノ）}}$ に限りなく近づく。

（2） $t$ がすべての実数をとるときに $\mathrm{P}(t)$ が描く曲線を $C$ とする。点 $\mathrm{P}(t)$ $(t\neq 1)$ における $C$ の接線の傾きは，$t\to 1$ のとき $\boxed{\text{（ハ）}}$ に近づく。曲線 $C$ と直線 $y=ax$ が異なる3点で交わるための必要十分条件は $\boxed{\text{（ヒ）}}<a<\boxed{\text{（フ）}}$ である。

# B 1

$n$ は正の整数とする。

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{2}}=$ $\boxed{\text{（ヘ）}}$ である。

以下で $p$，$q$，$r$ は正の実数とする。$S_p(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$ とおく。

（2） すべての $n$ に対し $S_3(n)=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ であることを証明しなさい。

（3） 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}S_p(n)$ が 0 でない有限の値となるのは，$r$ と $p$ の間に関係式 $r=$ $\boxed{\text{（ホ）}}$ が成り立つときのみである。そのときの極限値を $p$ を用いてあらわせば $\boxed{\text{（マ）}}$ である。さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\{S_q(n)\}^2$ が 0 でない有限の値となるのは，$p$ と $q$ の間に関係式 $p=$ $\boxed{\text{（ミ）}}$ が成り立つときに限る。

（4） すべての $n$ に対し $S_p(n)=\{S_q(n)\}^2$ が成り立つための必要十分条件は，$p=3$ かつ $q=1$ であることを証明しなさい。