

- [1] (1) ある自然数  $n$  に対して  $2^n$  は 22 桁で最高位の数字が 4 となります.

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771$$

として計算すると,  $n = \boxed{(1)} \boxed{(2)}$  となります. また  $2^n$  の末尾の数字は  $\boxed{(3)}$  であることがわかります.

- (2) 実数  $m$  を定数とします.  $x$  と  $y$  に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ mx - y - 3m + 1 = 0 \end{cases}$$

が  $x > 0$  かつ  $y > 0$  である解をもつための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{(4)} \boxed{(5)}}{\boxed{(6)} \boxed{(7)}} < m < \frac{\boxed{(8)} \boxed{(9)}}{\boxed{(10)} \boxed{(11)}}$$

です.

[2]  $2n$  個の変数  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$  が 0 または 1 の値をとります. このとき

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^n a_kb_k$$

が偶数となる場合の数を  $A_n$ , 奇数となる場合の数を  $B_n$  とします. 例えば  $n = 1$  の場合は

$$(a_1, b_1) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$$

の 3 通りの場合に  $a_1b_1$  が偶数になりますから,  $A_1 = 3$  です. 同様に  $B_1 = 1$  もわかります.  $A_n$  と  $B_n$  は  $A_{n-1}$  と  $B_{n-1}$  を用いて

$$\begin{cases} A_n = \boxed{(12)} A_{n-1} + \boxed{(13)} B_{n-1} \\ B_n = \boxed{(14)} A_{n-1} + \boxed{(15)} B_{n-1} \end{cases}$$

と表すことができます. ここで  $A_n \pm B_n$  を考えると

$$A_n + B_n = \boxed{(16)} \times \boxed{(17)}^{n-1}, \quad A_n - B_n = \boxed{(18)} \times \boxed{(19)}^{n-1}$$

と求まります. このことから

$$A_n = \left( \boxed{(20)}^n + \boxed{(21)} \right) \times \boxed{(22)}^{n-1}$$

であることが従います.

[3] 座標空間の原点  $O(0, 0, 0)$  および 3 点  $A(1, 3, 2)$ ,  $B(2, 1, 1)$ ,  $C(-1, -1, 2)$  を考えます.

(1)  $\angle AOB = \theta$  とすると  $\sin^2 \theta = \frac{\boxed{(23)} \boxed{(24)}}{\boxed{(25)} \boxed{(26)}}$  となります. このことから  $\triangle OAB$  の面積を  $S$  とすると

$$S^2 = \frac{\boxed{(27)} \boxed{(28)}}{\boxed{(29)} \boxed{(30)}}$$

と計算されます.

(2) ベクトル  $\vec{v} = (1, \boxed{(31)}, -\boxed{(32)})$  は

$$\vec{v} \perp \vec{OA}, \quad \vec{v} \perp \vec{OB}$$

を満たします. さらに  $\vec{v}$  と  $\vec{OC}$  の内積が  $\vec{v} \cdot \vec{OC} = -\boxed{(33)} \boxed{(34)}$  であることから,  $\triangle OAB$  を含む平面と点  $C$  との距離  $h$  は

$$h^2 = \frac{\boxed{(35)} \boxed{(36)}}{\boxed{(37)} \boxed{(38)}}$$

を満たします. 以上から 4 点  $O, A, B, C$  を頂点とする三角すいの体積  $V$  は

$$V = \frac{\boxed{(39)} \boxed{(40)}}{\boxed{(41)} \boxed{(42)}}$$

と計算されます.

(3) 条件

$$3\alpha + \frac{1}{4}\beta + 5\gamma \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$$

を満たす実数  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて

$$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

と表される点  $P$  の全体が作る立体を  $E$  とします.  $E$  の体積は  $V$  の  $\frac{\boxed{(43)} \boxed{(44)}}{\boxed{(45)} \boxed{(46)}}$  倍となります.

[4] 正数  $a, b, x, y$  を考えます.  $a + b = 1$  ならば, すべての自然数  $n$  に対して不等式

$$(ax + by)^n \leq ax^n + by^n$$

が成立することを証明してください.

[5] 関数

$$y = x^3 + 1$$

のグラフを曲線  $C$  とします. 正数  $t > 0$  に対して  $C$  上の点  $P(t, t^3 + 1)$  を定め,  $P$  における  $C$  の接線  $\ell_1$  と  $x$  軸との交点を  $R$  とします. 次に,  $C$  上に  $P$  と異なる点  $Q$  を,  $Q$  における  $C$  の接線  $\ell_2$  が  $P$  を通るようにとります. そして  $\ell_2$  と  $x$  軸との交点を  $S$  とします.

(1)  $\triangle PRS$  の面積を  $t$  で表しましょう.

(2) (1) で考えた  $\triangle PRS$  の面積の最小値を求めましょう.

[6] 関数  $F(t)$  を

$$F(t) = \int_0^1 |x^2 - 2tx| dx$$

によって定義します.

(1) 実数  $t$  で場合分けをして  $F(t)$  を  $t$  の式で表しましょう.

(2)  $t$  が  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動くときの  $F(t)$  の最大値と最小値を求めましょう.