I　aを正数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

によって定義する。このとき

$$f(x+y) + f(x-y) = \boxed{(1)}\, f(x)f(y)$$

である。また自然数 n に対して

$$f(nx) = \boxed{(2)}\, f(x)f((n - \boxed{(3)}\,)x) - f((n - \boxed{(4)}\,)x)$$

となる。とくに

$$f(3x) = \boxed{(5)}\, f(x)^{\boxed{(6)}} - \boxed{(7)}\, f(x)$$

である。これらの結果から 3 次方程式

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{25}{28} = 0$$

の実数解が

$$\frac{\boxed{(8)}^{\frac{1}{\boxed{(9)}}} + \boxed{(8)}^{-\frac{1}{\boxed{(9)}}}}{2}$$

であることが分かる。

II　A, B, C の 3 人は 1 匹の猿と他の動物を飼育している。3 人は共同で餌のマンゴーを N 個買った。ある日 3 人は別々に飼育場に行き，猿と他の動物にマンゴーを食べさせた。最初は A が行き，1 個を猿に与え，残りの $\frac{1}{3}$ を他の動物に与え，$\frac{2}{3}$ を飼育場に残しておいた。次に B が飼育場に行き，A と同様に，1 個を猿に与え，残りの $\frac{1}{3}$ を他の動物に与え，$\frac{2}{3}$ を飼育場に残しておいた。最後に C が飼育場に行き，やはり 1 個を猿に与え，残りの $\frac{1}{3}$ を他の動物に与え，$\frac{2}{3}$ を飼育場に残しておいた。翌日 3 人は飼育場に行き，残っていたマンゴーの内，1 個を猿に与えた。 すると残りのマンゴーは 3 人で 3 等分することができた。

このような N の最小値は $\boxed{(10)}\boxed{(11)}$ である。 また一般の N はこの最小値に $\boxed{(12)}\boxed{(13)}$ の倍数を加えたものである。

III 次の **1**, **2** のうち, いずれか1問を選択し答えなさい。選択した問題の番号を $\boxed{(14)}$ に記入し, **1** を選んだ場合は解答欄の $\boxed{(15)}$ から $\boxed{(28)}$ に, **2** を選んだ場合は $\boxed{(29)}$ から $\boxed{(44)}$ に答えなさい。

選択した問題の番号を $\boxed{(14)}$ に記入しなさい。

1 選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入しなさい。

二つの数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ と $b_1, b_2, b_3, \cdots$ が与えられている。$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ としたとき

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(b_i - b_{i+\boxed{(15)}\boxed{(16)}}) + s_{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}\, b_n \quad (n \geqq 2)$$

である。さらに一般に

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_kb_k = \sum_{k=n+1}^{n+m-1} s_k(b_k - b_{k+\boxed{(15)}\boxed{(16)}}) - s_nb_{\boxed{(19)}\boxed{(20)}+1} + s_{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}\, b_{n+m} \quad (m \geqq 2)$$

となる。ある正数 M が存在し, すべての k に対して $|s_k| \leqq M$ となり, さらに数列 b_n は正数で n が増えるにしたがって $\boxed{(23)}\boxed{(24)}$ するとする。このとき

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} s_i(b_i - b_{i+\boxed{(15)}\boxed{(16)}})\right| \leqq M(b_1 - b_{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}) \leqq Mb_1$$

となる。よって

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqq \boxed{(27)}\boxed{(28)}\, Mb_1$$

である。

[選択肢]

(01)	-2	(02)	-1	(03)	0	(04)	1	(05)	2
(06)	$n-2$	(07)	$n-1$	(08)	n	(09)	$n+1$	(10)	$n+2$
(11)	$-m$	(12)	m	(13)	$n+m$	(14)	$n-m$	(15)	M
(16)	発散	(17)	収束	(18)	増加	(19)	減少	(20)	$-M$

2　次のプログラムは$\sqrt{50}$の値を小数第3位まで求め印刷するものである。$B=7$ から始めて, 0.1 刻みに B を増やし, B^2 が 50 を越えたら, 越える一つ前から B を 0.01 刻みにして増やす。再び B^2 が 50 を越えたら, 越える一つ前から B を 0.001 刻みにして増やす。再び B^2 が 50 を越えたら, 越える一つ前の B が求める値であり, 刻みを 0.0001 とする。プログラムの中の空欄には選択肢から最も適切なものを選びその番号を答えなさい。

100　A=50

110　B=7

120　C=0.1

130　IF　B $\boxed{(29)}\boxed{(30)}$ B > A　THEN　GOTO $\boxed{(31)}\boxed{(32)}$

140　B=B + $\boxed{(33)}\boxed{(34)}$

150　GOTO $\boxed{(35)}\boxed{(36)}$

160　B=B − $\boxed{(37)}\boxed{(38)}$

170　C=C $\boxed{(39)}\boxed{(40)}$ 10

180　IF　C < $\boxed{(41)}\boxed{(42)}$ THEN　GOTO $\boxed{(43)}\boxed{(44)}$

190　GOTO　140

200　PRINT　B

210　END

[選択肢]

(01)	120	(02)	130	(03)	140	(04)	150	(05)	160
(06)	170	(07)	180	(08)	190	(09)	200	(10)	210
(11)	0	(12)	0.1	(13)	0.01	(14)	0.001	(15)	0.0001
(16)	A	(17)	B	(18)	C	(19)	D	(20)	E
(21)	+	(22)	−	(23)	*	(24)	/	(25)	**

IV　選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入しなさい。ただし n 次の多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と書く。

p が素数であれば多項式 $x^5 - p^2 x + p$ が因数分解できないことを証明する。以下

$$f(x) = x^5 - p^2 x + p = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$$

と書くことにする。いま $f(x) = g(x)h(x)$ と因数分解されたとする。このとき g, h は $\boxed{(45)(46)}$ でない $\boxed{(47)(48)}$ 次以下の整数を係数とする多項式である。ここで

$$g(x) = \sum_{k=0}^{4} b_k x^k \ (b_0 > 0), \quad h(x) = \sum_{k=0}^{4} c_k x^k$$

とする。

$$a_0 = b_0 \boxed{(49)(50)} = \boxed{(51)(52)}$$

であるから, $b_0 = p, c_0 = 1$ か $b_0 = \boxed{(53)(54)}$, $c_0 = \boxed{(55)(56)}$ である。前者の場合

$$a_1 = b_1 + pc_1 = \boxed{(57)(58)}$$

であるから, $\boxed{(59)(60)}$ が p の $\boxed{(61)(62)}$ であることが分かる。さらに

$$\boxed{(63)(64)} = b_2 + b_1 \boxed{(65)(66)} + p \boxed{(67)(68)} = 0$$

であるから, $\boxed{(69)(70)}$ も p の $\boxed{(61)(62)}$ である。同様の議論により, b_3, b_4 が p の $\boxed{(61)(62)}$ であることが分かる。ところで

$$\boxed{(71)(72)} = b_4 c_1 + b_3 c_2 + b_2 c_3 + b_1 c_4 = 1$$

であるから, $\boxed{(73)(74)}$ が p の $\boxed{(75)(76)}$ となり矛盾する。後者の場合も同様に矛盾となる。よって $f(x)$ の因数分解は存在しない。

[選択肢]

(01)	a_1	(02)	a_2	(03)	a_3	(04)	a_4	(05)	a_5
(06)	b_1	(07)	b_2	(08)	b_3	(09)	b_4	(10)	b_5
(11)	c_1	(12)	c_2	(13)	c_3	(14)	c_4	(15)	c_5
(16)	a_0	(17)	b_0	(18)	c_0	(19)	-3	(20)	-2
(21)	-1	(22)	$-p$	(23)	p	(24)	$-p^2$	(25)	p^2
(26)	約数	(27)	定数	(28)	倍数	(29)	素数	(30)	整数
(31)	1	(32)	2	(33)	3	(34)	4	(35)	5

V　半径 r の球面がある。球面と中心を通る平面との交わりを大円という。図のように3つの大円 D_1, D_2, D_3 が A, B, C, A′, B′, C′ で交差している。このとき AA′, BB′, CC′ は球の中心を通る。球面上の三角形 △ABC を考える。$\alpha = \angle\mathrm{BAC}$ を, D_2 を AA′ を軸にして回転させ, 辺 AB を辺 AC に重ねるときの回転角とし, $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ にとる。同様に $\beta = \angle\mathrm{CBA}$, $\gamma = \angle\mathrm{ACB}$ を定義する。

球面の表面積は $4\pi r^2$ である。D_1, D_2 で囲まれる球面上の4つの領域の中で △ABC と △A′B′C′ をそれぞれ含む2つの領域の和集合を S_{12} とする。S_{12} の面積は $\boxed{(77)}\boxed{(78)}\,\alpha r^2$ である。 同様のことを D_2, D_3 および D_3, D_1 で考えれば, S_{12}, S_{23}, S_{31} の和集合は球面全体となることが分かる。ただし, △ABC と △A′B′C′ の和集合は S_{12}, S_{23}, S_{31} の共通部分となっている。このことに注意すれば △ABC の面積を S としたとき

$$\boxed{(79)}\boxed{(80)}\, r^2(\alpha+\beta+\gamma) - \boxed{(81)}\boxed{(82)}\, S = 4\pi r^2$$

となる。とくに $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $S = \dfrac{\pi r^2}{\boxed{(83)}\boxed{(84)}}$ である。また $r = 2$, $S = 8$ のとき

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \boxed{(85)}\boxed{(86)}$$

となる。一般に球面上の三角形の内角の和 $\alpha+\beta+\gamma$ は π よりも大きくなる。