[1]　座標平面上に点 A(4, 3) と点 B(8, 2)，直線 l : $y = x$ と直線 m : $y = 0$ が与えられている．

(1) 直線 l に関して点 A と対称な点を A′ とし，直線 m に関して点 B と対称な点を B′ とする．A′ と B′ の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}'\left(\boxed{(1)},\ \boxed{(2)}\right),\qquad \mathrm{B}'\left(\boxed{(3)},\ \boxed{(4)}\boxed{(5)}\right)$$

である．

(2) 点 P が直線 l 上を動くとき，線分の長さの和 AP + PB が最小となる P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boxed{(6)}\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}\boxed{(9)}},\ \frac{\boxed{(10)}\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}\right)$$

である．

(3) 点 Q が直線 l 上を動き，点 R が直線 m 上を動くとき，線分の長さの和 AQ+QR+RB が最小となる Q, R の座標はそれぞれ

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}\boxed{(17)}},\ \frac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}\right),$$

$$\mathrm{R}\left(\frac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}},\ 0\right)$$

である．

[2] a を実数の定数とする．区間 $1 \leqq x \leqq 4$ を定義域とする 2 つの関数

$$f(x) = ax, \qquad g(x) = x^2 - 4x + 9$$

を考える．以下の条件を満たすような a の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) 定義域に属するすべての x に対して，$f(x) \geqq g(x)$ が成り立つ．

このような a の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ である．

(2) 定義域に属する x で，$f(x) \geqq g(x)$ を満たすものがある．

このような a の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である．

(3) 定義域に属するすべての x_1 とすべての x_2 に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ が成り立つ．

このような a の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}}$ である．

(4) 定義域に属する x_1 と x_2 で，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ を満たすものがある．

このような a の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}}$ である．

[3]　3次式 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ で，各係数 a_k $(k=0,1,2,3)$ が 1 または -1 となるものを考える．このような3次式の総数を N とする．

(1) 総数 N の値は $\boxed{(34)}\boxed{(35)}$ である．また，このような3次式 $f(x)$ の係数の和 $f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3$ がとりうる値は全部で $\boxed{(36)}\boxed{(37)}$ 通りある．

次に，これら N 個の3次式を1つずつ書いたカードを N 枚用意して箱に入れる．ただし，異なるカードには異なる3次式が書かれているものとする．この箱の中から3枚のカードを同時に取り出し，取り出されたカードに書かれている3次式を $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ とする．

(2) $f(x)+g(x)+h(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$ として，その係数の和 $b_0+b_1+b_2+b_3$ を S で表す．S がとりうる値の最大値は $\boxed{(38)}\boxed{(39)}$ である．また S が最大値をとる確率は

$$\frac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}\boxed{(44)}}$$

である．

(3) $f(x)g(x)h(x)=c_0x^9+c_1x^8+\cdots+c_8x+c_9$ として，その係数の和 $c_0+c_1+\cdots+c_8+c_9$ を T で表す．$T=0$ となる確率は

$$\frac{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}$$

である．

[4]　a, b は実数の定数で $a \geqq 0$，$b > 0$ を満たすとする．x についての２次方程式

$$(*) \qquad x^2 - (2a \log_{10} 2)x + (\log_{10} b)^2 = 0$$

を考える．

(1) $a = 3$ のとき，方程式 $(*)$ が実数解をもたないような b の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ が実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表し，その条件を満たす領域を ab 平面上に図示せよ．

[5]　$\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\dots\}$ を自然数全体の集合とする．集合 S を

$$S=\{(x,y)\mid\ x\in\boldsymbol{N},\ y\in\boldsymbol{N}\}$$

と定める．S の２つの要素 (a,b), (c,d) に対して，次の条件Ｐまたは Q が成り立つとき，$(a,b)\lhd(c,d)$ と表すことにする．

$$\mathrm{P}:\ a+b<c+d\ ,$$
$$\mathrm{Q}:\ a+b=c+d\quad \text{かつ}\quad a<c\ .$$

また S の要素 (m,n) に対して集合 $T(m,n)$ を

$$T(m,n)=\{(x,y)\mid\ (x,y)\in S,\ (x,y)\lhd(m,n)\}$$

と定める．

(1) $T(2,3)$ の要素をすべて書き並べよ．

(2) $T(1,n)$ の要素の個数を n の式で表せ．

(3) $T(2,n)$ の要素の個数を n の式で表せ．

(4) S の要素 (x,y) に対して $w(x,y)=2^x\cdot 2^y$ とおく．$T(2,n)$ のすべての要素 (x,y) に対する $w(x,y)$ の和を n の式で表せ．

[6] a, b を実数の定数とし，２次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

とおく．関数 $y = F(x)$ は $x = \alpha$ で極大になり，$x = \beta$ で極小になるものとする．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる２つの実数解をもつことを示せ．

(2) $F(\alpha) - F(\beta) = \dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ となることを示せ．

(3) α, β がさらに不等式 $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 2$ を満たすとする．このとき $F(\alpha) - F(\beta)$ のとりうる値の範囲を求めよ．