I　(1)　x, y を整数とする。2 つの不等式

$$\frac{1}{xy} \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right),$$

$$\frac{1}{x(x+y)} \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

が同時に成り立たないことを示す。もし同時に成り立つとすると

$$\sqrt{5}(x^2 + 2xy) \geqq \boxed{(1)}\, x^2 + \boxed{(2)}\, xy + \boxed{(3)}\, y^2$$

であるから

$$\left(\boxed{(4)}\, y - \left(\sqrt{\boxed{(5)}} - \boxed{(6)}\right)x\right)^2 \leqq 0$$

となる。これは $\sqrt{\boxed{(7)}}$ が無理数であることに矛盾する。

(2)　座標平面上の 3 点 A$(-1, 0)$, B$(4, 0)$, C$(0, 3)$ が与えられ, 点 P と直線 AB, BC, CA との距離をそれぞれ t, u, v とする。$t^2 + u^2 + v^2$ が最小となるのは P の座標が

$$\left(\frac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}, \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}\right)$$

のときであり, その最小値は $\dfrac{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}$ である。

II　赤色のカードが5枚あり, 1から5まで番号が付いている。白色のカードも5枚あり, 1から5まで番号が付いている。 いまA, B, C, D, Eの5人にそれぞれ赤と白の2枚のカードを分け与えた。このとき次の条件が満たされていた。

(a) Aは赤の4をもらった。

(b) Cの1つの番号はBの赤の番号であり, もう1つの番号はDの白の番号である。

(c) B, C, Dの赤と白のカードの番号をすべてあわせれば1, 3, 5が2度ずつ現れる。

(d) AとCは, 赤の番号が白の番号より大きい。

(e) A, B, Cの赤と白のカードの番号をすべてあわせれば1から5がすべて現れ, 1が重複する。

これらの条件を満たす分け方は次の2通りである。ただし, ある人が赤の3と白の5をもらったときは, (3, 5)と記述し, 以下の解答では $\boxed{(20)} > \boxed{(28)}$ とする。

A: ($\boxed{(16)}$, $\boxed{(17)}$), B: ($\boxed{(18)}$, $\boxed{(19)}$), C: ($\boxed{(20)}$, $\boxed{(21)}$), D: ($\boxed{(22)}$, $\boxed{(23)}$), E: ($\boxed{(24)}$, $\boxed{(25)}$)

または

A: ($\boxed{(16)}$, $\boxed{(17)}$), B: ($\boxed{(26)}$, $\boxed{(27)}$), C: ($\boxed{(28)}$, $\boxed{(29)}$), D: ($\boxed{(30)}$, $\boxed{(31)}$), E: ($\boxed{(24)}$, $\boxed{(25)}$)

III 次の **1**, **2** のうち, いずれか1問を選択し答えなさい。選択した問題の番号を $\boxed{(32)}$ に記入し, **1** を選んだ場合は解答欄の $\boxed{(33)}$ から $\boxed{(41)}$ に, **2** を選んだ場合は $\boxed{(42)}$ から $\boxed{(53)}$ に答えなさい。

選択した問題の番号を $\boxed{(32)}$ に記入しなさい。

1 次の計算をしなさい。

(1)

$$1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{21}{2^{20}}$$
$$=\boxed{(33)}-\frac{\boxed{(34)}\boxed{(35)}}{2^{20}}$$

(2)

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{10\cdot11\cdot12}$$
$$=\frac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}\boxed{(38)}}{\boxed{(39)}\boxed{(40)}\boxed{(41)}}$$

2 次のプログラムは 2 以上の自然数 A を与えたとき, A のすべての素因数とその個数を求めるものである。A が素数の場合は, 素数と表示する。プログラムの中の空欄には選択肢から最も適切なものを選びその番号を答えなさい。

```
100  INPUT PROMPT "A= " : A
110  LET S=0
120  LET J=2
130  LET K=0
140  LET Q= (42)(43) (A / J)
150  LET R= A − (44)(45) * J
160  IF R>0 THEN GOTO (46)(47)
170  LET K=K+1
180  LET A=Q
190  GOTO (48)(49)
200  LET S=S+K
210  IF K>0 THEN PRINT J ; "が" ; K ; "個"
220  LET J=J+1
230  IF A >=J THEN GOTO (50)(51)
240  IF (52)(53) = 1 THEN PRINT "Aは素数"
250  END
```

[選択肢]

(01)	A	(02)	S	(03)	J	(04)	K	(05)	Q
(06)	R	(07)	THEN	(08)	LET	(09)	RUN	(10)	GOTO
(11)	NEXT	(12)	FOR	(13)	ABS	(14)	INT	(15)	100
(16)	110	(17)	120	(18)	130	(19)	140	(20)	150
(21)	160	(22)	170	(23)	180	(24)	190	(25)	200
(26)	210	(27)	220	(28)	230	(29)	240	(30)	250

IV　三角形 ABC の各辺を $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$ とし, $2s=a+b+c$, $t=a+b$, $u=ab$ とする。三角形の面積 S はヘロンの公式により

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

を満たす。右辺を変形すると

$$S^2=-s(s^2-st+u)(\boxed{(54)}\,s-\boxed{(55)}\,t)$$

となる。このとき三角形の成立条件から $s<t<\boxed{(56)}\,s$ であり

$$4S^2 \leqq st^3+\boxed{(57)}\boxed{(58)}\,s^2t^2+\boxed{(59)}\boxed{(60)}\,s^3t+\boxed{(61)}\boxed{(62)}\,s^4$$

が成立する。右辺を $f(t)$ としたとき, $f(t)$ は $s<t<\dfrac{\boxed{(63)}}{\boxed{(64)}}\,s$ で単調増加であり, $\dfrac{\boxed{(63)}}{\boxed{(64)}}\,s<t<2s$ で単調減少である。よって $f(t)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{(65)}\boxed{(66)}}{\boxed{(67)}\boxed{(68)}}s^4$ である。これにより, S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{(69)}}}{\boxed{(70)}}s^2$ であることが分かる。

V　選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入しなさい。ただし, 解答欄 (85)〜(87) には計算した数を記入しなさい。また数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ に対して $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く。

次の式で定義される数 d_n をカタラン数という。

$$d_0 = 1,\ d_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{{}_{2n}C_n}{\boxed{(71)}\boxed{(72)}} \quad (n \geqq 1)$$

このとき

$$d_n = d_{n-1}d_0 + d_{n-2}d_1 + d_{n-3}d_2 + \cdots + d_1 d_{n-2} + d_0 d_{n-1}$$

が成り立ち

$$\begin{aligned}&(n+3)(d_n d_1 + d_{n-1}d_2 + d_{n-2}d_3 + \cdots + d_2 d_{n-1} + d_1 d_n)\\ =\ &(n+3)(d_{n+2} - \boxed{(73)}\boxed{(74)}\, d_{n+1}) = \boxed{(75)}\boxed{(76)}\, d_{n+1}\end{aligned}$$

となる。

$n \geqq 3$ とし, 正 n 角形 T を対角線で $n-2$ 個の三角形に分ける方法が何通りあるかを考える。T の頂点を順に $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とし, 対角線で $n-2$ 個の三角形に分ける場合の数を D_n とする。ただし, $D_3 = 1$ である。対角線 $A_1 A_k$ ($\boxed{(77)}\boxed{(78)} \leqq k \leqq \boxed{(79)}\boxed{(80)}$) を使って三角形に分ける場合の数は

$$D_k D_{\boxed{(81)}\boxed{(82)}-k}$$

であり, それらの和は

$$\sum_{k=\boxed{(77)}\boxed{(78)}}^{\boxed{(79)}\boxed{(80)}} D_k D_{\boxed{(81)}\boxed{(82)}-k}$$

となる。n 個の頂点で同様のことを考えれば, 重複を考慮して

$$n\left(\sum_{k=\boxed{(77)}\boxed{(78)}}^{\boxed{(79)}\boxed{(80)}} D_k D_{\boxed{(81)}\boxed{(82)}-k}\right) = 2\ (\ \boxed{(83)}\boxed{(84)}\ )D_n \quad (n \geqq 4)$$

となる。実際

$$D_3 = 1, D_4 = 2, D_5 = \boxed{(85)}, D_6 = \boxed{(86)}\boxed{(87)}$$

である。 ところで D_n と d_n が満たす関係式を比較することにより

$$D_{\boxed{(88)}\boxed{(89)}} = d_n$$

であることがわかる。

[選択肢]

(01) -3	(02) -2	(03) -1	(04) 1	(05) 2
(06) 3	(07) $n-3$	(08) $n-2$	(09) $n-1$	(10) n
(11) $n+1$	(12) $n+2$	(13) $n+3$	(14) $-2n$	(15) $2n$