数学－Ⅰ

点 (x, y) は，任意の実数 θ_1, θ_2 に対して

$$\begin{cases} x = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \\ y = \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 \end{cases}$$

をみたしている．このとき，xy 平面において点 (x, y) の存在しうる領域は

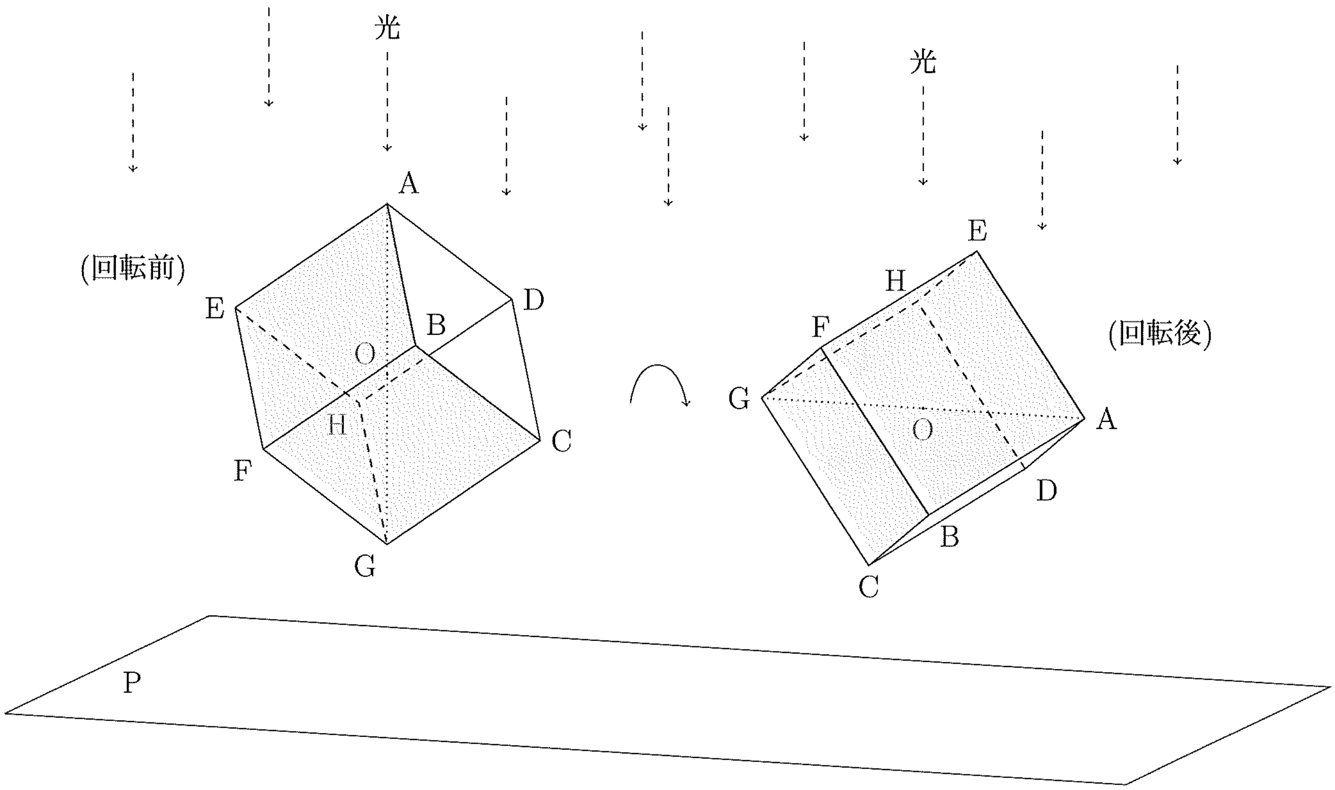
$$\begin{cases} \boxed{(1)}\boxed{(2)} \leqq x \leqq \boxed{(3)}\boxed{(4)} \\ y \geqq \boxed{(5)}\,x^2 + \boxed{(6)}\boxed{(7)} \\ y \leqq \boxed{(8)}\,x^2 + \boxed{(9)}\,x + \boxed{(10)}\boxed{(11)} \\ y \leqq \boxed{(12)}\,x^2 - \boxed{(13)}\,x + \boxed{(14)}\boxed{(15)} \end{cases}$$

であり，その面積は $\dfrac{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}$ である．

数学－Ⅱ

1辺1メートルの立方体の箱 ABCD–EFGH がある．この箱は中空で，面 ABCD と面 EFGH は透明な素材でできていて光を通すが，その他の面は光を通さない．また，面の厚みは考慮しないことにする．

いま，対角線 AG が平面 P と垂直になるように平面 P の上方にこの箱をおいた．



平面 P が真上から垂直に光で照らされるとき，平面 P 上にできる立方体の影の外周は，$\boxed{(20)}$ 角形になり，その影の面積は，$\boxed{(21)}\boxed{(22)}\sqrt{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}$ 平方メートルである．

ここで，頂点 A, C, G, E をすべて含む平面を Q とし，対角線 AG の中点を O とする．次に，平面 P および Q を固定し，点 O を中心に，頂点 A, C, G, E を平面 Q 上に保ちながら，立方体を図のように 90° 回転した．回転後に平面 P 上にできる立方体の影の面積は，$\dfrac{\boxed{(25)}\boxed{(26)}\sqrt{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$ 平方メートルである．

環

数学－Ⅲ

xy 平面上で，原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ の周上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ で 2 次曲線 $y=x^2+px+q$ が接している．すなわち点 P での円の接線と 2 次曲線の接線が一致している．点 P が第 1 象限にあり，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．このとき

$$p=\boxed{(31)}\boxed{(32)}\sqrt{\boxed{(33)}\boxed{(34)}},\qquad q=\frac{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}}$$

である．また，2 次曲線，円周の第 1 象限の部分，y 軸で囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}\sqrt{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}}{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}+\frac{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}\pi$$

である．

数学－Ⅳ

この問題では2進法で数を表記する場合には，$101_{(2)}$ のように，添字に (2) と書くことにする．添字のない数はすべて10進法表記の数である．また，解答欄に書く数字はすべて10進法表記で書くものとする．

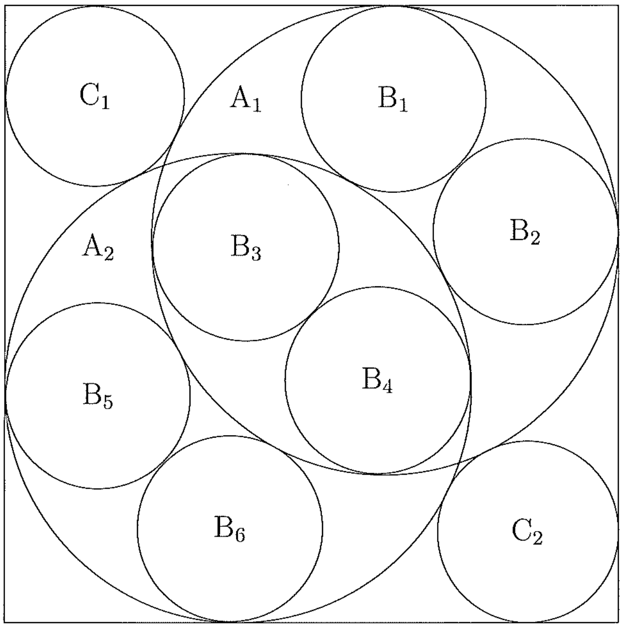
(1) 6桁の2進法表記の数の中で，$101010_{(2)}$ のように1が3つ使われる数は $\boxed{(49)}\boxed{(50)}$ 個ある．なお，数の表記では先頭の0は省略するため，$001101_{(2)}$ は6桁の数ではなく4桁の数 $1101_{(2)}$ である．

(2) 10桁の2進法表記の数の中で1が4つ使われる数をすべて合計すると $\boxed{(51)}\boxed{(52)}\boxed{(53)}\boxed{(54)}\boxed{(55)}$ である．

(3) 1000以下の正の整数のうち，2進法で表記すると1が4つ使われる数は $\boxed{(56)}\boxed{(57)}\boxed{(58)}$ 個ある．

数学－V

図のように，1つの正方形の中に，半径の異なる3種類の円が合計10個配置されている．



円 A_1 と A_2 は半径が同じ R で，それぞれ図のように正方形の2辺に内接している．円 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6 は半径が同じ r で，円 B_1 と B_2 は接し，図のように両方とも円 A_1 に内接し円 A_2 に外接している．円 B_3 と B_4 は接し，図のように両方とも円 A_1 と A_2 に内接している．円 B_5 と B_6 は接し，図のように両方とも円 A_1 に外接し円 A_2 に内接している．円 C_1 と C_2 は半径が同じ r' で，それぞれ図のように正方形の2辺に内接し，円 A_1 と A_2 に外接している．なお，円 B_1，B_2，B_5，B_6 は正方形の辺に接していない．

このとき，正方形の1辺の長さを s とすると

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{\boxed{\text{(59)}}\boxed{\text{(60)}}}{\boxed{\text{(61)}}\boxed{\text{(62)}}}\, r \\ s &= \left(\boxed{\text{(63)}}\boxed{\text{(64)}}\sqrt{R} + \boxed{\text{(65)}}\boxed{\text{(66)}}\sqrt{r'}\right)^{\boxed{\text{(67)}}\boxed{\text{(68)}}} \\ r' &= \frac{\boxed{\text{(69)}}\boxed{\text{(70)}} + \sqrt{10} + \boxed{\text{(71)}}\boxed{\text{(72)}}\sqrt{\boxed{\text{(73)}}\boxed{\text{(74)}} + 5\sqrt{10}}}{\boxed{\text{(75)}}\boxed{\text{(76)}}}\, r \end{aligned}\right.$$

である．

環

数学－Ⅵ

次のような２人で行うゲームがある．プレイヤーにはＬとＦという２つの選択肢が与えられる．一方がＬを選び，他方がＦを選んだ場合，Ｌを選んだ方は３点，Ｆを選んだ方は１点を獲得する．両方ともにＬを選んだり，両方共にＦを選んだりした場合，両者の得点はともに０点であるとする．いま，ＡとＢの２人がこのゲームを行い，xy 平面上の点によって両者の得点をあらわすことにする．Ａの得点を x，Ｂの得点を y とすると，このゲームで実現する点 (x, y) は

$$(3, 1), \qquad (1, 3), \qquad (0, 0)$$

の３点である．

このとき，A, Ｂともにと０点となるので，Ｌを選ぶことは必ずしも得策ではない．そこで，ＡおよびＢがＬを選ぶ確率をそれぞれ p および q としてみる．p と q を自由に動かしたときのＡの得点の期待値を x，Ｂの得点の期待値を y とすると，点 (x, y) の集まりは，原点と $(3, 1)$ を結ぶ線分，原点と $(1, 3)$ を結ぶ線分，および $(3, 1)$ と $(1, 3)$ を結ぶある曲線 Z で囲まれる領域となる．ただし，境界線を含む．

(1) 曲線 Z 上の点 (x, y) は

$$\left(x + \boxed{(77)}\boxed{(78)}\,y\right)^{\boxed{(79)}\boxed{(80)}} = \boxed{(81)}\boxed{(82)}\left(x + \boxed{(83)}\boxed{(84)}\,y + \boxed{(85)}\boxed{(86)}\right)$$

をみたす．

(2) x 軸と平行な直線が曲線 Z と接するとき，その接点は $\left(\dfrac{\boxed{(87)}\boxed{(88)}}{\boxed{(89)}\boxed{(90)}}, \dfrac{\boxed{(91)}\boxed{(92)}}{\boxed{(93)}\boxed{(94)}}\right)$ である．