数学－I

x, y は

$$xy + x + y = 20, \qquad x^2y + xy^2 = 91$$

をみたす実数とする．このとき

$$x^2 + y^2 = \boxed{(1)}\boxed{(2)}\boxed{(3)}\boxed{(4)}$$

であり

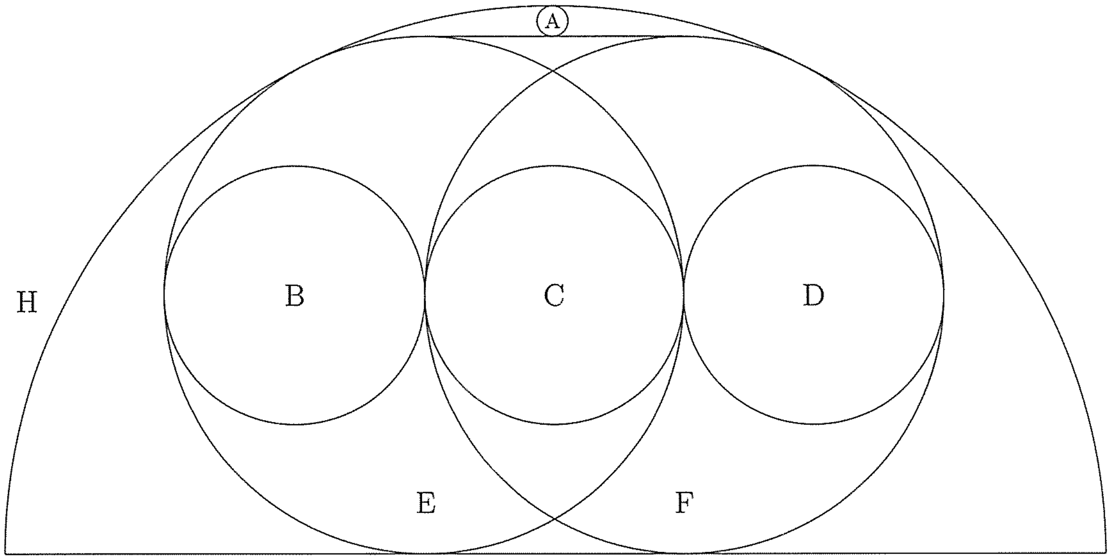
$$x^3 + y^3 = \boxed{(5)}\boxed{(6)}\boxed{(7)}\boxed{(8)}$$

である．

総

数学－Ⅱ

図のように半円 H の内側に 6 つの円が含まれている．



円 B, 円 C, 円 D の半径は等しく，円 B と円 C，円 C と円 D はそれぞれ接している．円 E と円 F の半径は等しい．円 E は円 B と円 C に接し，円 F は円 C と円 D に接している．円 E と円 F は半円 H の円弧と直径に接している．また，円 A の下に接する直線は円 E と円 F と接している．いま，円 A の半径を 1 とすると，円 B の半径は

$$\boxed{(9)}\boxed{(10)} + \boxed{(11)}\boxed{(12)}\sqrt{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}$$

であり，半円 H の半径は

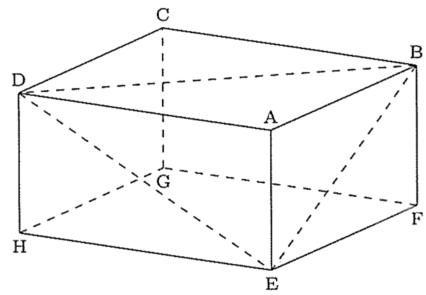
$$\boxed{(15)}\boxed{(16)} + \boxed{(17)}\boxed{(18)}\sqrt{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$$

である．

総

数学－Ⅲ

直方体 ABCD–EFGH において，次の条件が与えられたときの直方体の体積の最大値 V を考える．



(1) $\mathrm{AB} + 2\,\mathrm{AD} + 3\,\mathrm{AE} = 1$ のとき

$$V = \frac{\boxed{(21)}\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$$

となる．

(2) $\mathrm{AB} + \mathrm{AD} + \mathrm{AE} + \mathrm{BD} + \mathrm{DE} + \mathrm{BE} = 1$ のとき

$$V = \frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)} + \boxed{(29)}\boxed{(30)}\sqrt{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$$

となる．

数学－Ⅳ

(1) 実数 x, y が $|x| + |y| \leqq 1$ を満たすとき，$(x-1)^2 + (y-4)^2$ の最小値は $\boxed{(35)}\boxed{(36)}$ である．

(2) 実数 x, y が $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たすとき，$(x-1)^2 + (y-4)^2$ の最小値は

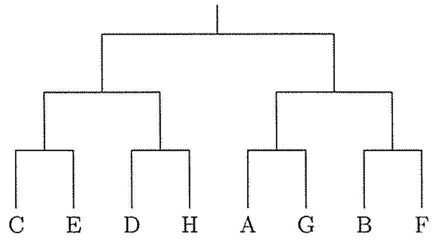
$$\boxed{(37)}\boxed{(38)} + \boxed{(39)}\boxed{(40)}\sqrt{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}$$

である．

総

数学－V

A から H までの 8 人の選手が勝ち残り式トーナメント方式で優勝を争う．トーナメントの組み合わせは試合前に抽選で無作為に決めるものとする．たとえば，右の図はそのような組み合わせの一つである．



いま，すべての選手が互角であり，それぞれの試合で相手に勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるとき，選手 A が優勝する確率は $\frac{\boxed{(43)}\boxed{(44)}\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}\boxed{(48)}}$ である．

もし，選手 H だけが他の選手より優れており，相手に勝つ確率が $\frac{2}{3}$ であったとすると，選手 A の優勝の可能性はトーナメントの組み合わせによって変わることになるが，抽選前の段階では，選手 A が優勝する確率は $\frac{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}\boxed{(54)}}$ である．

総

数学－Ⅵ

いま，10 棟の工場が地下水を汲み上げて操業している．工場には 1 から 10 までの番号がついており，工場 i の地下水の汲み上げ量を x_i で表すことにする $(x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, 10)$．また，各工場の地下水の汲み上げ量が増加すると，地下水の平均的な水位が低下することにより，汲み上げに要する費用が増加し，地下水の汲み上げ量 1 単位あたりの利益が減少する．いま，$(x_1, \ldots, x_{10})$ を $\boldsymbol{x}$ と表し，地下水の汲み上げ量 1 単位あたりの利益を

$$p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 25 - \displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i < 25 \text{ のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義する．この値は各工場で共通とする．すると，工場 i の利益は，$p(\boldsymbol{x})\,x_i$ で表すことができる．

(1) 各工場が互いに協力して $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} p(\boldsymbol{x})\,x_i$ を最大化するように地下水の汲み上げ量を決めた場合の工場 i の汲み上げ量を x'_i とすると，すべての工場の利益の合計は

$$\sum_{i=1}^{10} p(\boldsymbol{x}')\,x'_i = \frac{\boxed{(55)}\boxed{(56)}\boxed{(57)}\boxed{(58)}}{\boxed{(59)}\boxed{(60)}\boxed{(61)}\boxed{(62)}}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{x}'$ は $(x'_1, \ldots, x'_{10})$ を表す．

(2) 他の工場の地下水の汲み上げ量はあたえられたものとして，各工場が自らの利益を最大化するように地下水の汲み上げ量を決めた場合の工場 i の汲み上げ量を x''_i とすると，すべての工場の利益の合計は

$$\sum_{i=1}^{10} p(\boldsymbol{x}'')\,x''_i = \frac{\boxed{(63)}\boxed{(64)}\boxed{(65)}\boxed{(66)}}{\boxed{(67)}\boxed{(68)}\boxed{(69)}\boxed{(70)}}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{x}''$ は $(x''_1, \ldots, x''_{10})$ を表す．