**注　意**　問題1, 2, 3, 4, 5の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ミ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

# 1

（1）　$\alpha$, $\omega$ は定数で，$\omega > 0$ とする。媒介変数 $t$ で表された曲線

$$x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \sin(\omega t + \alpha)$$

について，$t$ を消去して $x$, $y$ の方程式を求める。$\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，求める方程式は $\boxed{\text{（ア）}}$ である。また，$-\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\beta = \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，求める方程式は

$$\boxed{\text{（イ）}}\,x^2 - \boxed{\text{（ウ）}}\,xy + \boxed{\text{（エ）}}\,y^2 = 1$$

である。ただし，$\boxed{\text{（イ）}}$，$\boxed{\text{（ウ）}}$，$\boxed{\text{（エ）}}$ には $\beta$ の式を書きなさい。

（2）　$i$ を虚数単位とし，集合 $L$ と $M$ を

$$L = \{\, z \mid z \text{ は整数 } a,\ b \text{ を用いて } z = a + bi \text{ と表される複素数} \,\}$$

$$M = \left\{ z \,\middle|\, z \in L,\ \frac{5}{z} \in L,\ |z| \neq 1,\ \left|\frac{5}{z}\right| \neq 1 \right\}$$

で定める。複素数 $z = a + bi$ に対して，$z \in L$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{（オ）}}$ は整数である。

　また，$z \in M$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{（カ）}}$ であり，集合 $M$ の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{\text{（キ）}}$ である。集合 $M$ の要素 $z$ のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる $z$ は $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

（3）　関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ と定め，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を用いて関数 $g(t)$ を $g(t) = f^{-1}(t)$ と定める。このとき，関数 $G(x) = \boxed{\text{（ケ）}}$ を用いて $g''(t) = G(g(t))$ と表すことができる。

## 2

点Oを中心とする半径$r$の球面上に3点A，B，Cがあり，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$であるとする。また，3点A，B，Cを通る平面を$\alpha$とし，点Oは平面$\alpha$上にないとする。さらに，△ABCの重心をGとし，直線OG上に点Dがあり，線分DGの中点が点Oであるとする。

(1) △ABCの面積は$\boxed{\text{（コ）}}$であり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{（サ）}}$である。

(2) 点Pの位置ベクトルは$\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$x$，$y$は実数）と表され，かつ直線OPは平面$\alpha$に直交しているとする。このとき，$x=\boxed{\text{（シ）}}$，$y=\boxed{\text{（ス）}}$である。いま，$t$を実数とし，点Hを$\overrightarrow{DH}=t\overrightarrow{OP}$によって決まる点とすると，$\overrightarrow{AH}=\boxed{\text{（セ）}}\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{（ソ）}}\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{（タ）}}\overrightarrow{OC}$である。さらに，点Hが平面$\alpha$上にあるとすると，$t=\boxed{\text{（チ）}}$である。

(3) 四面体ABCDの体積は$\boxed{\text{（ツ）}}$である。

## 3

$f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な増加関数とし，$n$ を正の整数とする。また，$I_n$，$J_n$ を

$$I_n=\int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)dx$$

$$J_n=\int_0^1 f(x)|\sin((2n+1)\pi x)|dx$$

で定める。

（1） $x$ についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x)=0$ の実数解で区間 $[0,\ 1]$ に属するものは $\boxed{\text{（テ）}}$ 個ある。それらを小さい順に $x_0$，$x_1$，$x_2$，……，$x_N$ $(N=\boxed{\text{（テ）}}-1)$ と並べると，$x_k=\boxed{\text{（ト）}}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ である。

次に，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \boxed{\text{（テ）}}-2$ に対して，$a_k$ を

$$a_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin((2n+1)\pi x)dx$$

で定める。このとき，次の（F1），（F2）が成り立つ。

（F1） $k$ が偶数のとき $\quad f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

（F2） $k$ が奇数のとき $\quad -f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq -f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

（2） （F1）が成り立つことを証明しなさい。

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n=0$ が成り立つことを証明しなさい。必要であれば，（F1），（F2）を証明なしに用いてよい。

（4） 数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n=\boxed{\text{（ナ）}}$ と表すことができる。

# 4

数字の 1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 2 枚，3 が書かれたカードが 3 枚，4 が書かれたカードが 4 枚の合計10枚のカードが入った箱がある。この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す。

（1） 操作を 2 回行ったとき，記録されている 2 つの数の和がそれら 2 つの数の積より大きくなる確率は $\boxed{\text{（ニ）}}$ である。

（2） 操作を 4 回行った時点で 1，2，3，4 の全ての数が記録されている確率は $\boxed{\text{（ヌ）}}$ である。また，操作を 4 回行った時点で記録されている数のうち最大の数が 3 である確率は $\boxed{\text{（ネ）}}$ である。

（3） 操作を $n$ 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類で，かつそのうちの 1 つが 1 である確率は $\boxed{\text{（ノ）}}$ である。また，操作を $n$ 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が 2 種類であったとき，そのうちの 1 つが 1 である条件付き確率を $p_n$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(p_n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{\text{（ハ）}}$ が成り立つ。

（4） 操作を $n$ 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で 1 と 4 の両方の数が記録されていて，かつ 1 が 4 より先に記録されている確率は $\boxed{\text{（ヒ）}}$ である。

## 5

(1)　$\alpha$，$\beta$ は定数で，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ とする。$x$ の 3 次方程式

$$18x^3 - 6\alpha x + \beta = 0$$

がただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件は $\beta >$ $\boxed{\text{（フ）}}$ である。$\beta =$ $\boxed{\text{（フ）}}$ のとき，曲線 $y = 18x^3 - 6\alpha x + \beta$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を $\alpha$ を用いて表すと $\boxed{\text{（ヘ）}}$ となる。

(2)　放物線 $C : y = 3x^2$ 上の点 P $(-a,\ 3a^2)$ $(a > 0)$ における法線と $C$ との交点で点 P と異なる点の $x$ 座標を $X(a)$ とする。$X(a) =$ $\boxed{\text{（ホ）}}$ であり，$a > 0$ における $X(a)$ の最小値は $\boxed{\text{（マ）}}$ である。

次に，$x_0 > 0$ とし，点 Q $(x_0,\ y_0)$ を放物線 $C$ 上にない点とする。$C$ 上の点における法線で点 Q を通るものがただ 1 つであるための必要十分条件は，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x) =$ $\boxed{\text{（ミ）}}$ に対して，$y_0 < f(x_0)$ が成り立つことである。