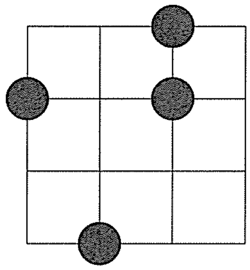
数学－I

座標平面の格子点 $\{\ (i,j) \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n\ \}$ に n 個の碁石を置く．ここで，n は正の整数とする．ただし，これらの碁石は同じ種類であり，互いに区別できない．また，格子点には高々 1 つの碁石しか置けないものとする．各 i に対して，$\{\ (i,j) \mid 1 \leqq j \leqq n\ \}$ を第 i 列，各 j に対して $\{\ (i,j) \mid 1 \leqq i \leqq n\ \}$ を第 j 行と呼ぶ．

例: 4×4 の場合



(1) n 個の碁石を置くすべての場合の配置の総数を A_n とすると

$$A_1 = 1,\ A_2 = 6,\ A_3 = \boxed{(1)}\boxed{(2)},\ A_4 = \boxed{(3)}\boxed{(4)}\boxed{(5)}\boxed{(6)},\ \ldots$$

である．

(2) n 個の碁石を置くとき，どの行およびどの列にも 1 個の碁石を置く場合の配置の総数を B_n とすると

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = \boxed{(7)}\boxed{(8)},\ B_4 = \boxed{(9)}\boxed{(10)}\boxed{(11)}\boxed{(12)},\ \ldots$$

である．

(3) n 個の碁石を置くとき，どの行およびどの列にも高々 2 個の碁石を置く場合の配置の総数を C_n とすると

$$C_1 = 1,\ C_2 = 6,\ C_3 = \boxed{(13)}\boxed{(14)},\ C_4 = \boxed{(15)}\boxed{(16)}\boxed{(17)}\boxed{(18)},\ \ldots$$

である．

総

数学 − II

3 つの直線 $x+2y-4=0,\ 2x-y-2=0,\ x-y+5=0$ によって作られる三角形を考える.

(1)　三角形の各頂点からの距離の 2 乗和が最小になる点は $\left(\dfrac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}\boxed{(22)}},\ \dfrac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}\right)$ である.

(2)　三角形の各辺からの距離の 2 乗和が最小になる点は $\left(\dfrac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}},\ \dfrac{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}\right)$ である.

数学 − III

$\alpha = \dfrac{\pi}{5}$ のとき

$$\tan\alpha + \tan 2\alpha = \sqrt{\boxed{(35)}\boxed{(36)} + \boxed{(37)}\boxed{(38)}\sqrt{\boxed{(39)}\boxed{(40)}}}$$

$$\tan\alpha \tan 2\alpha = \sqrt{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}$$

となる.

数学－IV

図のように放物線

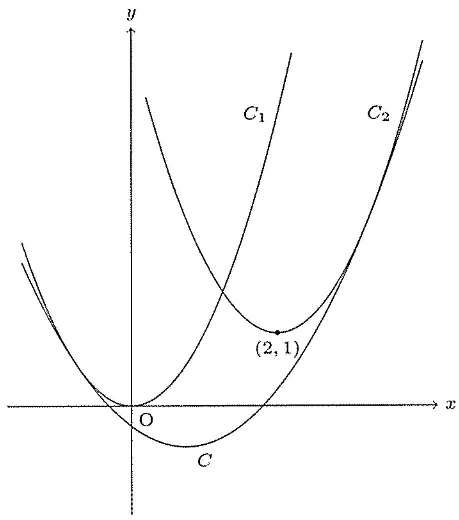
$$C:\ y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$$

(a, b は定数) が 2 つの放物線

$$C_1:\ y=x^2,\quad C_2:\ y=x^2-4x+5$$

に接している．

ここで，2 つの曲線が交点 P で接するとは，P における接線が一致することを意味し，このとき，P を接点という．

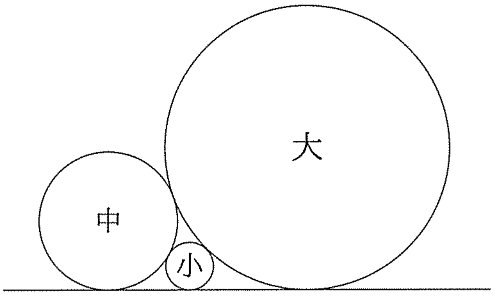


このとき，C と C_1 の接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$，$C$ と C_2 の接点の x 座標は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}}$ である．また，3 つの放物線に囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{(51)}\boxed{(52)}}{\boxed{(53)}\boxed{(54)}}$ である．

総

数学 – V

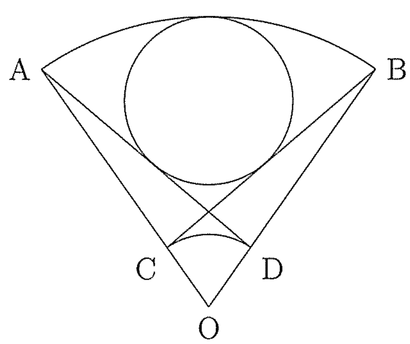
(1)　図のように大中小の円と直線が互いに接している．小円の半径は 4 寸，中円の半径は 9 寸であった．このとき，大円の半径は $\boxed{(55)}\boxed{(56)}$ 寸である．(注意: 図は原寸どおりではない．)



(2)　図のように半径 4 寸の扇形 AOB と半径 1 寸の扇形 COD が重なっている．今 $\cos\angle AOB = \dfrac{5}{8}$ とすると，弧 $\overset{\frown}{AB}$ と直線 AD, BC に接する円の半径は

$$\frac{\boxed{(57)}\boxed{(58)}}{\boxed{(59)}\boxed{(60)}}\left(\boxed{(61)}\boxed{(62)} - \sqrt{\boxed{(63)}\boxed{(64)}}\right)$$

寸である．(注意: 図は原寸どおりではない．)



総

数学 − VI

ある議会において，現在，3 つの政党 A, B, C が 70 議席ずつ獲得している．各議員は提案された議案に賛成するか反対するかのどちらかを選択するが，党議拘束がかけられるため，同じ政党に属する議員は同じ選択をする．今，賛成を Y，反対を N で表すものとし，例えば政党 A が賛成，政党 B が反対，政党 C が賛成した場合を YNY，政党 A が反対，政党 B が賛成，政党 C が賛成した場合を NYY と表す．議案の可決には過半数の 106 票以上が必要であり，YYY, YYN, YNY, NYY のときに議案は可決され，YNN, NYN, NNY, NNN のときに否決される．賛成と反対が同数の場合には否決される．

ここで，他の政党の選択は変わらないという条件のもとで，ある政党が自らの選択を変えたときに，議案の採決の結果まで変えてしまうなら，その政党はスイングであるとよぶ．例えば，YYN の場合を考えると，政党 A が選択を Y から N に変えると，NYN となり，採決の結果が可決から否決に変わってしまう．政党 B が選択を Y から N に変えた場合にも，採決の結果が可決から否決に変わってしまう．しかし，政党 C が選択を N から Y に変えても，YYY となり採決の結果は可決のままで変わらない．したがって，YYN の場合には，政党 A と政党 B がスイングである．

次に YNN の場合を考えると，政党 B と政党 C がスイングであることが分かる．しかし，YYY や NNN の場合にはスイングは存在しない．このように，政党 A がスイングになるのは，YYN, YNY, NYN, NNY の場合であり，政党 B がスイングになるのは，YYN, YNN, NYY, NNY の場合であり，政党 C がスイングになるのは，YNY, YNN, NYY, NYN の場合である．よって，各政党ともに 4 つの場合でスイングになる．スイングになる場合の回数を賛成・反対の組み合わせの総数 8 で割った値を影響力指数とよぶと，現在の議席数では各政党とも影響力指数は $\frac{1}{2}$ で同一である．

(1)　次の選挙において，政党 A が 90 議席，政党 B が 75 議席，政党 C が 45 議席になったとすると，政党 A の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(65)}}{\boxed{(66)}}$，政党 B の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(67)}}{\boxed{(68)}}$，政党 C の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}}$ となる．

(2)　さらに上記の選挙の半年後に，政党 C が 30 議席を有する政党 C_1 と 15 議席の政党 C_2 に分裂したとすると，政党 A の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(71)}\boxed{(72)}}{\boxed{(73)}\boxed{(74)}}$，政党 B の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(75)}\boxed{(76)}}{\boxed{(77)}\boxed{(78)}}$，政党 C_1 の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(79)}\boxed{(80)}}{\boxed{(81)}\boxed{(82)}}$，政党 C_2 の影響力指数は $\dfrac{\boxed{(83)}\boxed{(84)}}{\boxed{(85)}\boxed{(86)}}$ となる．