［I］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（1） 1から13までの整数が1つずつ書かれた13枚のカードの中から3枚を選ぶとき，偶数が書かれたカードが2枚以上含まれる選び方は $\boxed{\text{（あ）}}$ 通りであり，11以上の数が書かれたカードが少なくとも1枚含まれる選び方は $\boxed{\text{（い）}}$ 通りである。

（2） $\alpha=2+\sqrt{5}$ とするとき，α を解とし，整数を係数とする2次方程式 $x^2+a_1x+b_1=0$ を求めると $a_1=\boxed{\text{（う）}}$，$b_1=\boxed{\text{（え）}}$ である。また自然数 n に対して，α^n を解とし，整数を係数とする2次方程式を $x^2+a_nx+b_n=0$ とすると，$b_n=\boxed{\text{（お）}}$ であり，$a_n^2+a_{2n}=\boxed{\text{（か）}}$ である。

（3） 実数 m に対して

$$A(m)=\int_0^1 x(e^x-m)^2dx$$

とおくと，関数 $A(m)$ は $m=\boxed{\text{（き）}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{（く）}}$ をとる。

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

数直線上の座標1，2，3で表される位置に置かれた点に対する次の操作Tを考える。

操作T

(a) 点が1または2の位置に置かれている場合は確率$\frac{3}{4}$でそのままにしておき，確率$\frac{1}{4}$で正の方向へ1だけ動かす。

(b) 点が3の位置に置かれている場合は確率$\frac{3}{4}$でそのままにしておき，確率$\frac{1}{4}$で負の方向へ1だけ動かす。

以下，nを自然数とする。

（1） 1の位置に置かれている点Aに対し，操作Tをn回繰り返し行った時点で，点Aが1の位置に置かれている確率をp_n，2の位置に置かれている確率をq_nとすると，$p_n=$ $\boxed{（あ）}$，$q_n=$ $\boxed{（い）}$ である。

（2） 2の位置に置かれている点Bに対し，操作Tをn回繰り返し行った時点で，点Bが2の位置に置かれている確率をq'_nとすると$q'_n=$ $\boxed{（う）}$ である。

（3） 2点C，Dがともに1の位置に置かれているとする。はじめにK君が点Cに対し操作Tを繰り返し行うとし，点Cが1の位置を離れた次の回からはO君が加わって，K君が点Cに対し操作Tを繰り返し行うのと同時に，K君とは独立に，O君が点Dに対し操作Tを繰り返し行うとする。

（3-1） K君が点Cに対し操作Tをn回繰り返し行った時点で，2点C，Dがともに2の位置に置かれている確率をr_nとすると$r_1=0$，$r_2=$ $\boxed{（え）}$ であり，一般に$n\geqq 2$に対して$r_n=$ $\boxed{（お）}$ である。

（3-2） K君が点Cに対し操作Tをn回繰り返し行った時点で，2点C，Dがどちらも2の位置に置かれていない確率をs_nとすると$s_1=$ $\boxed{（か）}$ である。また一般に$n\geqq 2$に対して$s_n-r_n=$ $\boxed{（き）}$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な式を入れて文章を完成させなさい。また設問(3)(ii)に答えなさい。

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ を C で表す。C 上にない点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ $\left(\text{ただし } Y<\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}\right)$ から C に引いた2本の接線のうち，接点の x 座標が小さい方を l_1 とし，大きい方を l_2 とする。また l_1，l_2 と C との接点をそれぞれ Q_1，Q_2 とする。

(1) 接線 l_1，l_2 の傾き m_1，m_2 はそれぞれ $m_1=\boxed{\text{(あ)}}$，$m_2=\boxed{\text{(い)}}$ である。

(2) Q_1，Q_2 における C の法線をそれぞれ L_1，L_2 とするとき，L_1 と L_2 の交点 R の座標を X，Y を用いた式で表すと

$$\left(\boxed{\text{(う)}},\ \boxed{\text{(え)}}\right)$$

である。

(3) $\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{P}\mathrm{Q}_2$ が一定値 α (ただし $0<\alpha<\pi$) となるような点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の軌跡を $S(\alpha)$ で表す。

(i) $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の方程式は $\boxed{\text{(お)}}$ である。

(ii) $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ のときに $S(\alpha)$ を求めなさい。

(4) 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の上を動くとき，点 R が描く軌跡の方程式は $\boxed{\text{(か)}}$ である。

[Ⅳ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形 ABC において $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=2\theta$ とする。

（1） 三角形 ABC の内接円 C_1 の半径を $R_1(\theta)$ とする。$R_1(\theta)$ を θ の式で表すと $R_1(\theta)=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ である。また θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_1(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_1 とすると

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin^k\theta_1=\boxed{\text{（い）}}$$

が成り立つ。

（2） 三角形 ABC の内側に次のように円 C_2，C_3，…，C_n，… を作る。円 C_1 の外側にあって円 C_1 および辺 AB，AC に同時に接する円を C_2 とし，円 C_1，C_2 の外側にあって円 C_2 および辺 AB，AC に同時に接する円を C_3 とする。以下同様に自然数 $n\geqq 2$ に対して，円 C_1，C_2，…，C_{n-1} の外側にあって円 C_{n-1} および辺 AB，AC に同時に接する円を C_n とする。C_n の半径 $R_n(\theta)$ を θ と n の式で表すと $R_n(\theta)=$ $\boxed{\text{（う）}}$ である。

（3） x の 2 次式 $g_n(x)=$ $\boxed{\text{（え）}}$ に対して

$$\frac{d}{d\theta}\log R_n(\theta)=-\frac{g_n(\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

が成り立つ。また θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_n(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_n とすると $\sin\theta_n=$ $\boxed{\text{（お）}}$ である。

（4） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\sin\theta_n=$ $\boxed{\text{（か）}}$ である。このことから，$\theta=\theta_n$ のときの円 C_n の面積 S_n に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2S_n=$ $\boxed{\text{（き）}}$ が成り立つ。