I.

(i) Aの袋には赤玉1個と黒玉15個，Bの袋には黒玉16個が入っている。それぞれの袋から1個ずつ玉を取り出して交換する，という試行をn回繰り返したとき，赤玉がAの袋に入っている確率をp_nとする。ただし，nは自然数である。例えば，

$$p_1 = \frac{\boxed{(1) \vdots (2)}}{\boxed{(3) \vdots (4)}}, \quad p_2 = \frac{\boxed{(5) \vdots (6) \vdots (7)}}{\boxed{(8) \vdots (9) \vdots (10)}}$$

である。p_{n+1}をp_nで表すと，$p_{n+1} = \frac{\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}} p_n + \frac{\boxed{(13)}}{\boxed{(14) \vdots (15)}}$となるので，これより

$$p_n = \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}} \left\{ 1 + \left(\frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}} \right)^n \right\}$$

と求まる。

(ii) 赤玉7個，白玉10個，青玉n個が入った袋から，同時に4個の玉を取り出すとき，それらが赤玉1個，白玉2個，青玉1個である確率をq_nとする。ただし，nは自然数である。$\frac{q_{n+1}}{q_n}$をnの式で表すと，

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{n^2 + \boxed{(20) \vdots (21)}\, n + \boxed{(22) \vdots (23)}}{n^2 + \boxed{(24) \vdots (25)}\, n}$$

となる。これより$n \leqq \boxed{(26)}$の範囲で$q_n < q_{n+1}$が成り立ち，また，$n \geqq \boxed{(27)}$の範囲で$q_n > q_{n+1}$が成り立つことがわかる。従って，q_nは$n = \boxed{(28)}$で最大値$\frac{\boxed{(29) \vdots (30)}}{\boxed{(31) \vdots (32) \vdots (33)}}$をとる。

II. Oを原点とする座標空間において，4点

$$\mathrm{A}_1\ (1,1,1),\ \mathrm{B}_1\ (-1,-1,1),\ \mathrm{C}_1\ (1,-1,-1),\ \mathrm{D}_1\ (-1,1,-1)$$

を考えると，立体$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$は正四面体である。このとき，以下の設問に答えよ。

(i) 正四面体$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$を$xy$平面に平行な平面$z=-1+h\ (0 \leqq h \leqq 2)$で切ったときに出来る図形の面積を$S(h)$とすると，

$$S(h) = -\boxed{(34)}\,h^2 + \boxed{(35)}\,h$$

と表され，$S(h)$は$h=\boxed{(36)}$のとき最大値$\boxed{(37)}$をとる。（このときの図形はペトリー多角形と呼ばれている。）さらに，

$$V_1 = \int_0^2 S(h)dh = \frac{\boxed{(38)}}{\boxed{(39)}}$$

とおくと，V_1は正四面体$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$の体積となっている。

(ii) 三角形$\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$，三角形$\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1\mathrm{A}_1$，三角形$\mathrm{D}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，三角形$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$の重心をそれぞれ$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{B}_2$，$\mathrm{C}_2$，$\mathrm{D}_2$とする。このとき，立体$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$は再び，正四面体となる。（このことを，正四面体は自己双対であるという。）同様に，nを自然数として，三角形$\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$，三角形$\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n$，三角形$\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$，三角形$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$の重心をそれぞれ$\mathrm{A}_{n+1}$，$\mathrm{B}_{n+1}$，$\mathrm{C}_{n+1}$，$\mathrm{D}_{n+1}$とする。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{OA}_n} = \frac{\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}}\left\{1 - \left(-\frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}\right)^n\right\}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$$

である。

また，正四面体$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$の表面積$S_n$と体積$V_n$は，それぞれ，

$$S_n = \boxed{(44)} \cdot \boxed{(45)}^{-\boxed{(46)}n + \frac{\boxed{(47)}}{2}}, \quad V_n = \boxed{(48)} \cdot \boxed{(49)}^{-\boxed{(50)}n + \boxed{(51)}}$$

である。

III. 企業Xと企業Yが，互いに競合する商品を販売しようとしている。両社は，販売する商品の特性を，ある程度の範囲の中から選ぶことが可能である。また，消費者の好みもさまざまである。この状況での企業の戦略決定を，次のモデルで考えてみよう。

企業Xが販売する商品の特性をx，企業Yが販売する商品の特性をy，消費者の好みをtで表す。ただし，それぞれのとり得る値の範囲は，

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

とする。企業XとYは，まず，特性xとyをそれぞれ決めるものとする。その結果は公表され，各企業は，相手の企業が決めた特性も知るものとする。以下，$x < y$の場合に限定して考察する。第2段階として，企業Xは販売する商品の1個あたりの販売価格p（円）を決め，同様に企業Yはq（円）を決める。ただし，販売価格のとり得る値の範囲は，$p > 0$，$q > 0$とする。一方，好みtを持つ消費者は，自分の好みと商品の特性および販売価格を考え合わせて，次のように商品を選択して購入するものとする。この消費者にとっての企業Xの商品の価値V_Xと企業Yの商品の価値V_Yが，Uとcを正の定数として，

$$V_X = U - p - c(t-x)^2, \quad V_Y = U - q - c(t-y)^2$$

で定まるものとし，消費者は，自分にとっての価値が大きい方の商品を選択するものとする。問題の複雑化を避けるため，もし価値が等しければ，企業Xの商品を選択するものとする。また，いずれの場合でも，消費者は，選択した商品を必ず購入するものとする。

以下の設問において，太線の四角による表示のある問い，例えば $\boxed{(52)}$ や $\boxed{(53)}$ など，に対してはx，y，p，q，cのいずれかの文字が入る。xを入れる場合は1，yならば2，pならば3，qならば4，cならば5と解答しなさい。

(i) 消費者の選択に関する仮定から実数$\bar{t}$が定まり，好みtを持つ消費者は，$t \leqq \bar{t}$であれば企業Xの商品を選び，$t > \bar{t}$であれば企業Yの商品を選ぶことがわかる。$\bar{t}$の値をx，y，p，q，cを用いて表すと，

$$\frac{\boxed{(52)} + \boxed{(53)}}{\boxed{(54)}} + \frac{1}{\boxed{(55)}\,\boxed{(56)}} \cdot \frac{\boxed{(57)} - \boxed{(58)}}{\boxed{(59)} - \boxed{(60)}}$$

となる。

(ii) 次に，企業の売上高に相当する値を定める。はじめに記したように，消費者の好みはさまざまであり，その好みが0と1の間に分布していると考えている。その分布の仕方を特定すれば，各消費者の選択を集約することにより，各企業の売上高を定めることができる。ここでは，企業Xの売上高に相当する評価値T_Xと，企業Yの売上高に相当する評価値T_Yを，

$$T_X = p\,\bar{t}, \quad T_Y = q\,(1 - \bar{t})$$

と定め，これらの評価値を最大化する問題に置き換えて考える（ただし，$\bar{t}$は(i)で求めたものである）。もう少し詳しく記すと，第2段階における，$x < y$であることを前提とした価格設定がどのようになるかをまず調べ，その決定の仕方を考慮に入れて，評価値が最大になる商品の特性を求める，という問題をいくつかのステップに分けて考える。

まず，T_Xをpの関数と考える。ここで，T_Xをpの関数と考えるということは，T_Xの式の中に含まれるp以外の文字，すなわちx, y, q, c, はすべて定数と考える，ということである。この点に注意して，T_Xが最大値をとるpの値をx, y, q, cを用いて表すと，

$$\frac{\boxed{(61)}}{\boxed{(62)}} + \frac{\boxed{(63)}\left(\boxed{(64)} + \boxed{(65)}\right)\left(\boxed{(66)} - \boxed{(67)}\right)}{\boxed{(68)}}$$

となる。

(iii) 同様にして，T_Y を q の関数と考え，T_Y が最大値をとる q の値を x, y, p, c を用いて表すことができる。(ii)の結果と合わせると，p と q についての連立1次方程式が得られる。この連立方程式の解を $\bar{p}$ と $\bar{q}$ とすると，$p=\bar{p}, q=\bar{q}$ において，T_X は p の関数として最大値をとり，同時に，T_Y は q の関数として最大値をとることがわかる。$\bar{p}$ の値を x, y, c を用いて表すと，

$$\frac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}}\left(\boxed{(71)}-\boxed{(72)}\right)\left(\boxed{(73)}+\boxed{(74)}+\boxed{(75)}\right)$$

となり，$\bar{p}$ と $\bar{q}$ に対する $\bar{t}$ の値は，

$$\frac{\boxed{(76)}}{\boxed{(77)}}+\frac{\boxed{(78)}+\boxed{(79)}}{\boxed{(80)}}$$

と表される。

(iv) 最後に，各企業の価格決定が今求めた $\bar{p}$ と $\bar{q}$ になることを前提として，企業 X は商品の特性 x を以下のように決定する。まず，$p=\bar{p}, q=\bar{q}$ として，T_X を x の関数と考える。次に，この関数 $T_X=f(x)$ が最大値をとる x の値を求める。その値を $\bar{x}$ とする。ここで，関数 $T_X=f(x)$ のグラフの概形を解答用紙Bの座標平面に描きなさい。ただし，関数の極値および極値をとる x の値を明記する必要はありません。

(v) 企業 Y もまったく同様にして，$p=\bar{p}, q=\bar{q}$ とし，T_Y を y の関数と考えて，その関数が最大値をとる y の値を求める。その値を $\bar{y}$ とする。$\bar{x}$ と $\bar{y}$ が決まれば，それらに対する $\bar{p}$ と $\bar{q}$ も確定する。これらの値の組は与えられた仮定を満たし，企業 X と Y にとって，お互いに最適な戦略決定になっている。最終的に求められた $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{t}$ それぞれの値を c を用いて表し，解答用紙Bの解答欄にある所定の位置に答えのみ記入しなさい。