［Ｉ］

以下の文章の空欄に適切な数，式または行列を入れて文章を完成させなさい。ただし設問（２）において，適切な行列が複数個ある場合は，それらをすべて記入しなさい。

（１） $a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（２） 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す１次変換により点 $\mathrm{B}(1, 1)$ と点 $\mathrm{C}(1, 0)$ はそれぞれ点 B' と点 C' に移されるとする。また $\mathrm{O}(0, 0)$ を原点とする。$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，かつ $\triangle\mathrm{OB}'\mathrm{C}'$ が正三角形となるような行列 A をすべて求めると $A=$ $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（３） 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=\dfrac{e^t+3e^{-t}}{2} \\ y=e^t-2e^{-t} \end{cases}$$

と表される曲線 C の方程式は

$$\boxed{\text{（う）}}\,x^2+\boxed{\text{（え）}}\,xy+\boxed{\text{（お）}}\,y^2=25$$

である。

また曲線 C の接線の傾きは，$t=$ $\boxed{\text{（か）}}$ に対応する点において -2 となる。

（４） $\alpha>1$ を実数とする。$0\leqq x\leqq 1$ を定義域とする関数 $f(x)=x-x^{\alpha}$ が最大値をとる点を $x(\alpha)$ とすると $x(\alpha)=$ $\boxed{\text{（き）}}$ である。また $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1+0} x(\alpha)=$ $\boxed{\text{（く）}}$ である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

xy 平面上で点Pは x 軸上に，点Qは y 軸上に置かれ，点Pの x 座標と点Qの y 座標はそれぞれ -2 以上 2 以下の整数であるとする。点P，Qに対して次の操作を考える。

操作

点Pの座標が $(i,\ 0)$，点Qの座標が $(0,\ j)$ であるとき次の規則に従って2点P，Qを互いに独立に同時に処理する。

(P1)　$-1 \leqq i \leqq 1$ ならば点Pを $(i+1,\ 0)$ または $(i-1,\ 0)$ のどちらかに確率 $\frac{1}{2}$ ずつで移す。

(P2)　$i=-2$ ならば点Pを必ず $(-1,\ 0)$ に移す。

(P3)　$i=2$ ならば点Pをそのままにしておく。

(Q1)　$-1 \leqq j \leqq 1$ ならば点Qを $(0,\ j+1)$ または $(0,\ j-1)$ のどちらかに確率 $\frac{1}{2}$ ずつで移す。

(Q2)　$j=-2$ ならば点Qを必ず $(0,\ -1)$ に移す。

(Q3)　$j=2$ ならば点Qをそのままにしておく。

さて，2点P，Qがともに $(0,\ 0)$ に置かれている状態から始め，上の操作を3回繰り返し行う。

(1)　3回の操作の後，点Pが $(1,\ 0)$ に置かれている確率は $\boxed{\text{（あ）}}$ であり，$(-1,\ 0)$ に置かれている確率は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

(2)　xy 平面上で不等式 $y>x$ の表す領域を A，不等式 $y>-x$ の表す領域を B とする。各回の操作後に点Pが常に $A \cup B$ 内に置かれているという事象を U とし，各回の操作後に点Qが常に $A \cup B$ 内に置かれているという事象を V とすると，事象 $U \cup V$ の確率は $\boxed{\text{（う）}}$ である。

xy 平面上で2点P，Qを結ぶ線分の長さをPQとする。ただし2点P，Qがともに $(0,\ 0)$ に置かれている場合は $\mathrm{PQ}=0$ とする。

(3)　3回の操作を通じてちょうど1回だけ $\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ となる確率は $\boxed{\text{（え）}}$ である。

(4)　3回の操作を通じたPQの最大値の期待値は $\boxed{\text{（お）}}$ である。

［Ⅲ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。ただし設問（2）において，適切な t の値が複数個ある場合は，それらをすべて記入しなさい。

放物線 $y=x^2$ を C とする。C 上に点 P$(-1,\ 1)$ をとり，P における C の法線と C との交点のうち，P と異なるものを Q とする。また t を実数として，点 P をとおって傾きが t の直線を l_1 とし，点 Q をとおって l_1 と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とする。

（1） 点 Q の座標は（ （あ） ，（い） ）である。

（2） 点 R が点 P, Q と異なるように t を変化させるときの △PQR の面積の最大値は （う） である。また △PQR の面積を最大にする t の値をすべて求めると $t=$ （え） である。

（3） 点 P, Q とは異なる C 上の点 T$(u,\ u^2)$ を考える。$\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{TQ}}<0$ となるような u の範囲は

（お） $<u<$ （か）

である。

（4） 点 R が，不等式 $y<x^2$ の表す領域に入るような t の範囲は

（き） $<t<$ （く）

である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $R > 0$ とする。極座標$(r,\ \theta)$に関する条件

$$0 \leqq r \leqq R,\ \ \alpha \leqq \theta \leqq \beta$$

により定まる図形をx軸のまわりに回転させて得られる立体の体積をTとする。Tをα, β, Rを用いた式で表すと

$$T = \boxed{\text{(あ)}}$$

である。

(2) 極方程式 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha)$ で表される曲線Cと，$\theta = \alpha$ で表される直線lおよびx軸の正の部分で囲まれた図形をSとする。ただし $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とし，関数$f(\theta)$は連続かつ$f(\theta) > 0$をみたし，$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ において増加または減少または定数とする。

Sをx軸のまわりに回転させて得られる立体の体積を$V(\alpha)$とすると

$$\frac{d}{d\alpha}V(\alpha) = \boxed{\text{(い)}}$$

であり，したがって

$$V(\alpha) = \boxed{\text{(う)}}$$

である。またSを直線lのまわりに回転させて得られる立体の体積を$W(\alpha)$とすると

$$W(\alpha) = \boxed{\text{(え)}}$$

である。

(3) (2)において $f(\theta) = \sqrt[3]{\cos\theta}$ とするとき $V\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $W\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めると

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{(お)}},\ \ W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{(か)}}$$

である。