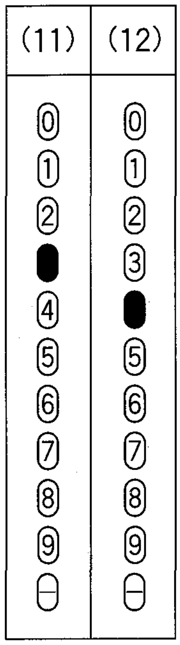
解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の［1］から［3］の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

［例］ | (11) | (12) | と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄（11）の ③ と解答欄（12）の ④ にマークしてください．

なお，解答欄にある ⊖ はマイナスの符号－を意味します．



2. 解答欄（1），（2），… の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します．それらを（1），（2），… で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号－は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

［例］

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$　　　　$0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$3 \longrightarrow \dfrac{3}{1} \longrightarrow \dfrac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$

$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{-}\boxed{1}\,x$

$-\dfrac{4}{6} \longrightarrow \dfrac{-2}{3} \longrightarrow \dfrac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$

[1] a, b を実数の定数とする．x の２次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

で定め，

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

とおく．

(1) 関数 $F(x)$ は極値をとらないとする．$b \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき，a のとりうる値の範囲は $\boxed{(1)}\boxed{(2)} \leqq a \leqq \boxed{(3)}\boxed{(4)}$ である．このときの $f(x)$ に対し，$F(1)$ のとりうる値の最小値は $\dfrac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}$ であり，最大値は $\dfrac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}$ となる．

(2) 関数 $F(x)$ は $x = \alpha$ で極大になり，$x = \beta$ で極小になるとする．$0 < \beta - \alpha \leqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つような $f(x)$ のうち，b が最小になるものは

$$f(x) = x^2 + \boxed{(13)}\,x + \frac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}$$

である．

[2] 三角形 OAB の重心を C とすると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される．線分 OC の中点を D, 辺 OA の中点を E とする．直線 AD と直線 BE の交点を F とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される．

さらに，辺 OB の中点を G，直線 BD と直線 AG の交点を H とする．線分 AB と線分 FH の長さの比は

$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{AB}} = \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$$

となる．三角形 OAB の面積を S_1，三角形 OFH の面積を S_2 とすると，

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}\boxed{(31)}}$$

となる．

[3] 1から4までの数字がひとつずつ書かれたカードが，各3枚ずつ合計12枚ある．

(1) この12枚から3枚のカードを取り出して並べ，3桁の整数を作る．このようにして得られる整数は全部で $\boxed{(32)}\boxed{(33)}\boxed{(34)}$ 通りある．

(2) この12枚から5枚のカードを取り出して並べ，5桁の整数を作る．このようにして得られる整数は全部で $\boxed{(35)}\boxed{(36)}\boxed{(37)}$ 通りある．

(3) この12枚のカードを箱に入れてよくかき混ぜ，そこから1枚を取り出し，書かれている数字を記録してからカードを箱に戻す．この操作を5回繰り返して得られる5個の数字の中に1がちょうど2個含まれる確率は $\dfrac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．また，このようにして得られる5個の数字を記録した順に並べて得られる5桁の整数は全部で $\boxed{(44)}\boxed{(45)}\boxed{(46)}\boxed{(47)}$ 通りあり，そのうち5個の数字の中に1がちょうど2個含まれる整数は $\boxed{(48)}\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}$ 通りある．

[4] 以下の条件をみたす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ をみたす実数 y が存在する.

(2) $x^2 + xy + y^2 = 1$ をみたす正の実数 y が存在しない.

(3) すべての実数 y に対して $x^2 + xy + y^2 > x + y$ が成り立つ.

[5] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = n\,3^n\,{}_{100}\mathrm{C}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, 100)$$

$$b_n = n^2\,2^n\,{}_{100}\mathrm{C}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, 100)$$

によって定める．ただし，${}_{100}\mathrm{C}_n$ は 異なる 100 個のものから n 個取り出す組み合わせの総数を表す．

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots, 99)$ を n のなるべく簡単な式で表せ．

(2) a_n が最大になるような n をすべて求めよ．

(3) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots, 99)$ を n のなるべく簡単な式で表せ．

(4) b_n が最大になるような n をすべて求めよ．

[6] 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 3\int_{x-1}^{x} (t+|t|)(t+|t|-1)\,dt$$

によって定める．

(1) $f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ．

(2) 座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(3) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ．