

- [1] $f(x) = x^2 + 3$ とし, 点 $(0, f(0))$ を通り傾きが a である直線の方程式を $y = g(x)$ とする.

$$I(a) = 3 \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$$

とおく.

- (1) 区間 $a \leq -1$ における $I(a)$ の最小値は $\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ である.

- (2) $-1 \leq a \leq 0$ のとき $I(a) = \boxed{(3)}\boxed{(4)} a^3 + \boxed{(5)}\boxed{(6)} a + \boxed{(7)}\boxed{(8)}$ で,

この区間における $I(a)$ の最小値は $\boxed{(9)}\boxed{(10)}$, 最大値は $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ である.

[2] 袋の中に赤玉 2 個と白玉 2 個が入っている．この袋から 2 個の玉を同時に取り出し、色を調べてから袋に戻す．以下では、これを試行という． n を自然数とする．次のルール (A), (B), (C) に従って試行を繰り返すゲーム G_n を行い、得点を決める．

(A) 取り出した 2 個の玉の色が異なる場合には試行を繰り返す．ただし、 n 回試行を行った場合には繰り返さず、ゲームを終了する．

(B) 取り出した 2 個の玉の色が同じ場合にはゲームを終了する．

(C) k 回試行を行いゲームが終了した場合に得点を 2^k とする．

従って最低得点は 2, 最高得点は 2^n である．以下では、 $\log_2 3 = 1.585$, $\log_2 5 = 2.322$ として計算せよ．

(1) $n = 5$ のとき、すなわちゲーム G_5 において、得点が 2^3 となる確率は $\frac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}$,

得点が 2^5 となる確率は $\frac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$ である．

(2) ゲーム G_n において、得点が 2^{n-1} 以下となる確率が 0.99 以上になるための必要十分条件は $n \geq \boxed{(21)}\boxed{(22)}$ である．

(3) ゲーム G_n における得点の期待値は $\boxed{(23)}\boxed{(24)} \left(\frac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}} \right)^n + \boxed{(27)}\boxed{(28)}$ である．

[3] 座標平面上で、3点 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(2, 5)$ を頂点とする3角形 OAB について考える.

3角形 OAB の面積は $\boxed{(29)}$ である. また, 線分 AB を $1:2$ に内分する点を C とするとき, $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OC}$ により定まる点 D の座標は

$$\left(\boxed{(30)} \boxed{(31)}, \boxed{(32)} \boxed{(33)} \right),$$

点 O に関して, 点 A と対称である点の座標は

$$\left(\boxed{(34)} \boxed{(35)}, \boxed{(36)} \boxed{(37)} \right),$$

点 O に関して, 点 B と対称である点の座標は

$$\left(\boxed{(38)} \boxed{(39)}, \boxed{(40)} \boxed{(41)} \right)$$

である.

以下では, n 角形 ($n = 3, 4, 5, \dots$) はその周および内部からなるものとする.

3角形 OAB の点 E, F (E と F は同じ点でもよい) を用いて, $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ の形に表すことのできる点 P 全体の集合を S , $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$ の形に表すことのできる点 Q 全体の集合を T とする.

このとき, S は面積が $\boxed{(42)} \boxed{(43)}$ である $\boxed{(44)}$ 角形をなし, T は面積が $\boxed{(45)} \boxed{(46)}$ である $\boxed{(47)}$ 角形をなす.

[4] a は定数とする. 以下において, 割り算は x についての整式とみて行うものとする.

(1) A, B は x についての整式とし, A を $x^2 - a$ で割ると余りが $x + 1$, B を $x^2 - a$ で割ると余りが x であるとする. AB を $x^2 - a$ で割ったときの余りを求めよ.

(2) x^{150} を $x - a$ で割ったときの余りを求めよ.

(3) x^{150} を $x^2 - a$ で割ったときの余りを求めよ.

(4) x^{151} を $x^2 - a$ で割ったときの余りを求めよ.

(5) x^{151} を $x^5 - a$ で割ったときの余りを求めよ.

[5] 座標平面上で，不等式

$$3(\log_2 x - 1) \leq \log_2 y - 1 \leq 2(\log_2 x - 1)$$

をみたす点 (x, y) 全体の集合を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 (x, y) が D 内を動くとき， $x + y$ の最大値を求めよ．

(3) 点 (x, y) が D 内を動くとき， $x - y$ の最大値を求めよ．

[6] k は 0 でない実数とする. 座標平面上で, 不等式 $x^2 + y^2 < k^2$ をみたす点 (x, y) 全体の集合を A , 不等式 $y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2k$ をみたす点 (x, y) 全体の集合を B とする.

(1) $A \cap B = \phi$ となるような k の値の範囲を求めよ. ただし, ϕ は空集合を表す.

(2) $A \subset B$ となるような k の値の範囲を求めよ.