［I］

以下の文章の空欄に適切な数，式または行列を入れて文章を完成させなさい。(設問（3）では，適切な行列が複数個ある場合は，それらをすべて答えなさい。)

（1） x, y が3つの不等式

$$x>2,\ y \geqq \frac{x}{x-2},\ x+y \leqq 6$$

を満たすとき，$3x+2y$ の最大値は $\boxed{\text{（あ）}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（2） 実数 α に対して α を超えない最大の整数を $[\alpha]$ と書く。$[\ \ ]$ をガウス記号という。

（i） 自然数 m の桁(けた)数 k をガウス記号を用いて表すと $k=\left[\boxed{\text{（う）}}\right]$ である。

（ii） 自然数 n に対して 3^n の桁数を k_n で表すと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=\boxed{\text{（え）}}$ である。

（3） $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2=B^2$ を満たす2次の正方行列 A をすべて求めると $A=\boxed{\text{（お）}}$ である。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

a, b を正の実数，m を実数，k を負の実数とする。xy 平面上の楕円 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と直線 l：$y=mx+k$ が異なる2点P，Qで交わるための必要十分条件は $k>-\sqrt{\boxed{\text{（あ）}}}$ であり，このとき $\mathrm{PQ}=\dfrac{2ab\sqrt{\boxed{\text{（い）}}}}{\boxed{\text{（あ）}}}$ である。さらに，点P，Qを固定して点Rを楕円 C 上で動かすときの△PQRの面積の最大値を A とすると $A=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\times\boxed{\text{（う）}}$ である。次に，m を固定して k を動かすとき，A が最大となる k の値は $\boxed{\text{（え）}}$ であり，その最大値は $\boxed{\text{（お）}}$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（3）に答えなさい。

正方形の4つの頂点に A_1, A_2, A_3, A_4 の順に反時計回りに名前をつける。A_1, A_2 上には表を上にした硬貨を1枚ずつ置き，A_3, A_4 上には裏を上にした硬貨を1枚ずつ置く。いま次の操作Tを何回か繰返し行う。

操作T

> 4つの頂点のどれかを確率 $\frac{1}{4}$ ずつで選ぶ。選ばれた頂点を A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ とするとき，辺に沿って A_i 上の硬貨と並んでいる硬貨2枚のうち A_i 上の硬貨とは逆の面を上にしたものの枚数を k とする。次に，A_i 上の硬貨を確率 $\frac{k}{3}$ でひっくり返し，確率 $1-\frac{k}{3}$ でそのままにしておく。

以下，n を自然数とする。操作Tを n 回繰返し行った結果，表を上にした硬貨がちょうど1枚だけある確率を p_n，ちょうど2枚だけありそれらが辺に沿って並んでいる確率を q_n，ちょうど2枚だけありそれらが対角線に沿って並んでいる確率を r_n，ちょうど3枚だけある確率を s_n とする。

（1） $p_1=\boxed{（あ）}$，$q_1=\boxed{（い）}$，$r_1=\boxed{（う）}$，$s_1=\boxed{（え）}$ である。

（2） $n \geqq 2$ のとき，p_n, q_n, r_n, s_n と p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}, s_{n-1} の関係を4次の正方行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{（お）} & \boxed{（か）} & \frac{1}{3} & 0 \\ \boxed{（き）} & \boxed{（く）} & 0 & \frac{1}{6} \\ \boxed{（け）} & \boxed{（こ）} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{（さ）} & \frac{1}{3} & \boxed{（し）} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \\ s_{n-1} \end{pmatrix}$$

である。これより任意の n に対して r_n を求めると $r_n=\boxed{（す）}$ である。

（3） 任意の n に対して $p_n=s_n$ であることを示しなさい。

（4） 任意の n に対して $\sqrt{2}\,p_n+q_n$ と $-\sqrt{2}\,p_n+q_n$ をそれぞれ求めると

$\sqrt{2}\,p_n+q_n=\boxed{（せ）}$，$-\sqrt{2}\,p_n+q_n=\boxed{（そ）}$ である。これより

$p_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\boxed{（せ）}-\boxed{（そ）}\right)$，$q_n=\frac{1}{2}\left(\boxed{（せ）}+\boxed{（そ）}\right)$ である。

［Ⅳ］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（2），（3）に答えなさい。

平面上を運動する点Pの，時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=f(t)=\cos 2t+t\sin 2t,\quad y=g(t)=\sin 2t-t\cos 2t$$

と表されているとする。

（1） 点Pの時刻 t における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を求めると $\vec{\alpha}=\left(\boxed{\text{（あ）}},\ \boxed{\text{（い）}}\right)$ である。

（2） 時刻 t（ただし $t\fallingdotseq 0$）における点Pを通り，その時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ に平行な直線を l とするとき，l は必ず原点を中心とする半径1の円 C に接することを示しなさい。その接点Qの座標は $\left(\boxed{\text{（う）}},\ \boxed{\text{（え）}}\right)$ である。

（3） $f(t)$ は区間 $0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ で減少することを示しなさい。

（4） t が $\dfrac{\pi}{4}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき線分PQが動いてできる図形の面積 S を求めると $S=\boxed{\text{（お）}}$ である。