I　座標平面上の3点 A$(-2,0)$, B$(2,0)$, C$(1,4)$ が与えられ，点 P, Q, R をそれぞれ辺 AB, BC, CA 上の点とする。

$$t=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}},\ u=\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}},\ v=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CA}}$$

としたとき，△PQR が R を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるには

$$u-\boxed{(1)}\,v+\boxed{(2)}=0,\quad \boxed{(3)}\,t-\boxed{(4)}\,u-v+1=0$$

となることが必要である。このとき △PQR の面積は

$$t=\frac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}$$

のとき最小になる。

II　2つの自然数 a, b の関係 $a \prec b$ を次のように定める。素数を小さい順に $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \cdots$ とし, a, b の素因数分解を

$$a = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_m^{i_m}, \quad b = q_1^{j_1} q_2^{j_2} \cdots q_n^{j_n}$$

と表す。ただし $i_k\ (1 \leqq k \leqq m)$, $j_l\ (1 \leqq l \leqq n)$ は0以上の整数とし, $i_m \neq 0,\ j_n \neq 0$ である。以下では $i_0 = i_{m+1} = i_{m+2} = \cdots = 0$, $j_0 = j_{n+1} = j_{n+2} = \cdots = 0$ とする。ここで次のいずれかの条件が満たされるとき $a \prec b$ とする。

(1) $i_1 + i_2 + \cdots + i_m > j_1 + j_2 + \cdots + j_n$,

(2) $i_1 + i_2 + \cdots + i_m = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ であり, ある $k\ (1 \leqq k \leqq m)$ で

$$i_0 = j_0, i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_{k-1} = j_{k-1},\ i_k > j_k$$

となる。

このとき b は $\prec$ に関して a より大きいという。$2 \leqq N \leqq 50$ なる自然数 N で $\prec$ に関して最大の数は $\boxed{(9)}\boxed{(10)}$ であり, $\prec$ に関して小さいほうから10番目の数は $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ である。

III 次の **1**, **2** のうち, いずれか1問を選択し答えなさい。選択した問題の番号を $\boxed{(13)}$ に記入し, **1** を選んだ場合は解答欄の $\boxed{(14)}$ から $\boxed{(19)}$ に, **2** を選んだ場合は $\boxed{(20)}$ から $\boxed{(33)}$ に答えなさい。

1 $\triangle$ABC の頂点 A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。$\triangle$ABC に含まれる点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ が

$$\vec{p} = \frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるとき, AP の延長と BC との交点を Q とすると

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = \frac{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}$$

である。

2 次の2つのプログラムは2つの自然数A, Bを入力したとき, ある自然数Nを出力する。2つのプログラムで同じNが出力されるように2つ目のプログラムを完成させなさい。プログラムの中の空欄には選択肢から最も適切なものを選びその番号を答えなさい。

プログラム1

```
100  INPUT A, B
110  FOR N=A TO 1 STEP −1
120  IF A−N * INT(A/N) <> 0 THEN GOTO 160
130  IF B−N * INT(B/N) <> 0 THEN GOTO 160
140  PRINT N
150  GOTO 170
160  NEXT N
170  END
```

プログラム2

```
100  INPUT A, B
110  LET N= A
120  IF INT(B/N) * N < B THEN
130  LET N=N − [(20)(21)]
140  GOTO [(22)(23)]
150  END IF
160  [(24)(25)] INT( [(26)(27)] /N) * N < [(28)(29)] THEN
170  LET  N=N − [(20)(21)]
180  GOTO [(30)(31)]
190  [(32)(33)]
200  PRINT N
210  END
```

[選択肢]

(01)	A	(02)	B	(03)	N	(04)	GOTO	(05)	THEN
(06)	PRINT	(07)	IF	(08)	ELSEIF	(09)	END	(10)	END IF
(11)	INT	(12)	FOR	(13)	LET	(14)	NEXT	(15)	100
(16)	110	(17)	120	(18)	130	(19)	140	(20)	150
(21)	160	(22)	170	(23)	180	(24)	190	(25)	200
(26)	210	(27)	-1	(28)	0	(29)	1	(30)	2

IV　a, b を2以上の自然数とするとき

$$a^{(a^a)} = b^b$$

となる a, b は存在しないことを示す。以下の証明の空欄に選択肢から最も適切なものを選びその番号を解答欄に記入しなさい。

証明： 存在を仮定して矛盾を導く。$b = a^x,\ x > 0,$ と表すと $b^b = (a^x)^{(a^x)} = a^{xa^x}$ より

$$a^a = \boxed{(34)(35)}\, a^x = x\, \boxed{(36)(37)}$$

となる。これより x が $\boxed{(38)(39)}$ であることが分かる。

$$(a-1)a^{(a-1)} = (1 - \frac{1}{a})a^a < a^a < a \cdot a^a$$

であるので

$$(a^{a-1})^{(a^{a-1})} < b^{\boxed{(40)(41)}} < (a^{\boxed{(42)(43)}})^{(a^a)}$$

となる。$f(t) = t^t\ (t \geqq 2)$ が単調増加であることに注意すれば

$$a^{\boxed{(44)(45)}} < b < a^{\boxed{(46)(47)}}$$

となる。よって

$$\boxed{(48)(49)} < x < \boxed{(50)(51)}$$

となり x は $\boxed{(52)(53)}$ でない。ところで x および $a - x$ が $\boxed{(38)(39)}$ であることから, 互いに素な整数 $p, q\ (q \neq 0)$ および $m, n\ (n \neq 0)$ がとれて

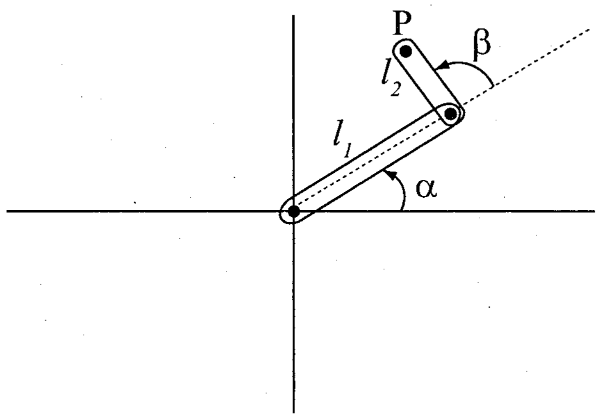
$$\frac{p}{q} = x = a^{a-x} = a^{\frac{m}{n}}$$

と書ける。したがって $a^m = \dfrac{p^n}{q^n}$ となり, $q = \boxed{(54)(55)}$ となる。x は $\boxed{(56)(57)}$ となり先ほどの結果と矛盾する。

[選択肢]

(01)	-2	(02)	-1	(03)	0	(04)	1	(05)	2
(06)	$a-2$	(07)	$a-1$	(08)	a	(09)	$a+1$	(10)	$a+2$
(11)	$b-2$	(12)	$b-1$	(13)	b	(14)	$b+1$	(15)	$b+2$
(16)	$x-2$	(17)	$x-1$	(18)	x	(19)	$x+1$	(20)	$x+2$
(21)	自然数	(22)	有理数	(23)	無理数	(24)	正の数	(25)	負の数

V　図のような xy 平面上を動く産業用ロボットアームがある。アームの長さをそれぞれ $l_1 = \sqrt{2}$, $l_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とし，アームの角度 α, β を反時計まわりに図のように定める。いま アームの角度は時刻 t とともに $\alpha = \pi t$, $\beta = k\pi t$ と変化し，t は $0 \leqq t \leqq 2$ を動く。



$k = 1$ のとき点 P が y 軸上にのるのは $\boxed{(58)}$ 回である。また $k = 2$ のとき，点 P が y 軸上にのるとき，t は

$$\boxed{(59)}\boxed{(60)}\,(\cos \pi t)^3 - \cos \pi t = 0$$

を満たす。このことから点 P が y 軸上にのるのは $\boxed{(61)}$ 回である。

平成20(2008)年度　環境情報学部　問題訂正

誤	→	正
p.4　Ⅱ　3行目 ・ q	→	・p （訂正についての説明：すべての q を p に換える）
p.5　Ⅲ　1 ・（条件追加）	→	・A, B, Cはいずれも原点でないとする。